3.7.7 Dělení mnohočlenem I

Předpoklady: 030706

Př. 1: Vypočti. a) $\left(4a^3-6a^2+12a\right):2a$ b) $\left(3x^3-2x^2+6\right):3x^2$

a) $\left(4a^3-6a^2+12a\right):2a=\frac{4a^3}{2a}-\frac{6a^2}{2a}+\frac{12a}{2a}=2a^2-3a+6$

b) $\left(3x^3-2x^2+6\right):3x^2=\frac{3x^3}{3x^2}-\frac{2x^2}{3x^2}+\frac{6}{3x^2}=x-\frac{2}{3}+\frac{2}{x^2}$

V minulé hodině jsme dělili mnohočlen jednočlenem. Jak budeme postupovat, když budeme dělit mnohočlenem? Například $\left(a^3-4a^2+6a-9\right):(a-3)$?

Pedagogická poznámka: S následujícím nápadem nepřicházím já, ale žáci. Je to většinou první nápad, který se objeví, když se zeptám co s tím.

První nápad:
$\left(a^3-4a^2+6a-9\right):(a-3)=\frac{a^3-4a^2+6a-9}{a-3}=\frac{a^3-4a^2+6a-9}{a}-\frac{a^3-4a^2+6a-9}{3}$: rozdělili bychom si zlomek tak, aby v každém jmenovateli byl pouze jednočlen. Je to rozumné?
Představíme si to na normálním zlomku: $\frac{7}{13}=\frac{7}{10}+\frac{7}{3}$ $\Rightarrow$ evidentní nesmysl, levá strana je menší než 1, pravá je větší, nemůžeme rozdělit číslo ve jmenovateli, udává velikost kousků a při jeho rozdělení bychom získali větší kousky (a tím pádem jinou hodnotu).

Př. 2: Navrhni způsoby, kterými bychom mohli odvodit postup pro dělení mnohočlenu mnohočlenem.

- Inspirace normálním dělením pod sebe.
- Počítání příkladu, u kterého známe výsledek (dělenec si vypočteme jako součin dvou mnohočlenů).

Př. 3: Vypočti součin $(a-3)\cdot\left(a^2-a+3\right)$ vytvoř podle něj zkušební příklad na dělení.

$(a-3)\cdot\left(a^2-a+3\right)=a^3-a^2+3a-3a^2+3a-9=a^3-4a^2+6a-9$
$\Rightarrow$ zkusíme dělení $\left(a^3-4a^2+6a-9\right):(a-3)=a^2-a+3$ (budeme znát výsledek a proto se nám bude jednodušeji počítat.

Pedagogická poznámka: Následující rozbor promítám, žáci si ho nepíší.

Zkusíme si příklad obrátit:

- $a^3-4a^2+6a-9=a^3-a^2+3a-3a^2+3a-9=(a-3)\cdot(a^2-a+3)$:
  - červené členy vznikly násobením výsledku a členu *a*,
  - modré členy vznikly násobením výsledku a členu -3.
- podobně můžeme najít odpovídající členy k násobení každého členu z výsledku dvojčlenem $(a-3)$:
  - $a^3-4a^2+6a-9=a^3-a^2+3a-3a^2+3a-9=(a-3)\cdot(a^2-a+3)$,
  - $a^3-4a^2+6a-9=a^3-a^2+3a-3a^2+3a-9=(a-3)\cdot(a^2-a+3)$,
  - $a^3-4a^2+6a-9=a^3-a^2+3a-3a^2+3a-9=(a-3)\cdot(a^2-a+3)$.

Kdybychom měli dělenec místo normální tvaru a^3-4a^2+6a-9 ve tvaru rozloženém $a^3-a^2+3a-3a^2+3a-9$, nebyl by příklad tak těžký. Které členy v normálním tvaru nevznikly sčítáním? Pouze:

- první člen a^3 s nejvyšší mocninou - je určen pouze členy s nejvyšší mocninou neznámé mnohočlenů $(a-3)$ a (a^2-a+3),
- poslední člen 9 - je určen pouze členy s nejvyšší (nultou) mocninou neznámé mnohočlenů $(a-3)$ a (a^2-a+3).

Kdybychom první člen a^2 ve výsledku našli jako podíl $a^3:a$, musíme zohlednit, že v mnohočlenu a^3-4a^2+6a-9 je obsažen (skrytě kvůli sčítání) i člen $-3a^2=a^2\cdot(-3)$.

Ještě jeden postřeh: nemůžeme čekat, že pokaždé příklad na dělení vyjde tak hezky. Při dělení mnohočlenu $(a^3-4a^2+6a-9+1):(a-3)$ bychom nedokázali přidanou jedničku rozdělit dvojčlenem $(a-3)$ a zůstal by nám jako zbytek.

Pedagogická poznámka: Předchozí rozbor vznikl kvůli tomu, že v prvním průchodu žáci odmítli algoritmus na dělení s tím, že "dělení nejvyšší mocniny nejvyšší mocninou" je přece to samé, co jsme zamítli v úvodu hodiny - rozdělení jmenovatele. Zjistil jsem, že z jejich pohledu mají pravdu, nic lepšího však zatím nemám.

Př. 4: Níže je spočten podíl 7305:3. Čím se tento zápis liší od normálního? Jaký je význam této odlišnosti? Zachycuje tento zápis přesně to, co se v jednotlivých krocích děje?

$$
\begin{array}{l}
\ \ 7305:3=2435 \\
-6 \\
\ \ 13 \\
-12 \\
\ \ \ \ 10 \\
\ \ -9 \\
\ \ \ \ \ 15 \\
\ \ -15 \\
\ \ \ \ \ \ 0
\end{array}
$$

Příklad se liší tím, že uvádíme v zápisu číslo, které odečítáme z původního čísla. Zápis není úplně přesný, protože:

- v prvním kroku neodečítáme od čísla 7 číslo 6, ale od čísla 7305 číslo 6000,
- výsledkem odečítání (číslem, které ještě musíme vydělit) není číslo 13, ale číslo 1305.

Zcela podrobný zápis by měl vypadat takto:

$$\begin{array}{l} \ \ 7305:3=2435 \\ -6000 \\ \ \ 1305 \\ -1200 \\ \ \ \ \ 105 \\ \ \ -90 \\ \ \ \ \ \ 15 \\ \ \ -15 \\ \ \ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

Zápis by sice lépe zachycoval, co se ve skutečnosti děje, ale obsahuje zbytečně mnoho nul a opakování číslic z konce čísla 7305.

Princip dělení pod sebe se dá znázornit na rozdělování peněz. Rozdělujeme 7503 třem lidem (příklad $7305:3$).

- Na začátku máme: 7 x tisícikoruna, 3 x stokoruna, 5 korun.
- Rozdělíme tisícikoruny $\Rightarrow$ na každou hromádku položíme dvě, jedna zbude. Zbylou tisícikorunu rozměníme na stokoruny.
- Máme třináct stokorun (deset rozměněných, tři původní) $\Rightarrow$ na každou hromádku položíme čtyři stokoruny, jedna zbude. Rozměníme zbylou stokorunu na desetikoruny.
- Máme deset desetikorun (rozměněných, v původní hromádce žádná nebyla) $\Rightarrow$ na každou hromádku položíme tři desetikoruny, jedna zbude. Rozměníme zbylou desetikorunu na koruny.
- Máme patnáct korun (deset rozměněných, pět původních) $\Rightarrow$ na každou hromádku položíme pět korun, nic nezbylo.

Př. 5: Zkus analogicky s podílem $7305:3$ vypočítat podíl $\left(a^3-4a^2+6a-9\right):\left(a-3\right)$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad zatím (1 třída) nikdo nevyřešil. Na promítnutí řešení (následující příklad) již někteří jednotlivci reagují. Nechávám

Př. 6: Níže je srovnán postup pro dělení podílů $7503:3$ a $\left(a^3-4a^2+6a-9\right):\left(a-3\right)$.

$$\begin{array}{r}
7305:3=2435 \\
-6 \\
13 \\
-12 \\
10 \\
-9 \\
15 \\
-15 \\
0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
\left(a^3-4a^2+6a-9\right):\left(a-3\right)=a^2-a+3 \\
-\left(a^3-3a^2\right) \\
\qquad\quad -a^2+6a-9 \\
\qquad -\left(-a^2+3a\right) \\
\qquad\qquad\quad 3a-9 \\
\qquad\qquad -\left(3a-9\right) \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

a) Odvoď ze zápisu algoritmus pro dělení mnohočlenu mnohočlenem.
b) Vysvětli, proč je prvním členem v podílu člen a^2.
c) Vysvětli, proč v prvním kroku odečítáme od původního mnohočlenu mnohočlen a^3-3a^2.
d) Vysvětli, proč v druhém kroku dělíme mnohočlen $-a^2+6a-9$.
e) Podobným způsobem zdůvodni všechny ostatní kroky.

a) Odvoď ze zápisu algoritmus pro dělení mnohočlenu mnohočlenem.
Uvedeno pod řešením příkladu.

b) Vysvětli, proč je prvním členem v podílu člen a^2.
Dělíme člen s největší mocninou v dělenci (a^3) členem s největší mocninou v děliteli (a).

c) Vysvětli, proč v prvním kroku odečítáme od původního mnohočlenu mnohočlen a^3-3a^2.
Podobně jako jsme zpětným násobením $2\cdot 3$ získali číslo 6, získáme zpětným násobením $a\left(a-3\right)=a^2-3a$ mnohočlen, který pak odečteme od původního mnohočlenu.

d) Vysvětli, proč v druhém kroku dělíme mnohočlen $-a^2+6a-9$.
Část původního mnohočlenu jsme rozdělili v prvním kroku, po odečtení jsme získali mnohočlen $-a^2+6a-9$ představující dosud nerozdělený zbytek, který ještě musíme rozdělit v dalších krocích.

e) Podobným způsobem zdůvodni všechny ostatní kroky.

Algoritmus děleni mnohočlenu mnohočlenem.
1. Seřadíme oba mnohočleny od členů s nejvyšší mocninou.
$\left(a^3-4a^2+6a-9\right):\left(a-3\right)=$
2. Vydělíme první člen dělence prvním členem dělitele a výsledek napíšeme jako první člen podílu.
$\left(a^3-4a^2+6a-9\right):\left(a-3\right)=a^2$
3. Zpětně vynásobíme získaný člen podílu s dělitelem a výsledek napíšeme pod dělenec.
$\left(a^3-4a^2+6a-9\right):\left(a-3\right)=a^2$

a^3-3a^2
4. Odečteme výsledek zpětného násobení od dělence a výsledek zapíšeme.

$$\begin{array}{l} \left(a^3-4a^2+6a-9\right):\left(a-3\right)=a^2 \\ -\left(a^3-3a^2\right) \\ \qquad -a^2+6a-9 \end{array}$$

5. Na mnohočlen získaný odečtením uplatňujeme kroky 2 – 4 dokud nám jako výsledky dělení vychází jednočleny.

$$\begin{array}{l} \left(a^3-4a^2+6a-9\right):\left(a-3\right)=a^2-a+3 \\ -\left(a^3-3a^2\right) \\ \qquad -a^2+6a-9 \\ \quad -\left(-a^2+3a\right) \\ \qquad\qquad 3a-9 \\ \qquad\quad -\left(3a-9\right) \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Př. 7: Vyděl.

a) $\left(2a^2+a-6\right):\left(a+2\right)$

b) $\left(6x^2-x-2\right):\left(2x+1\right)$

c) $\left(2y^2-5y+6\right):\left(2y-3\right)$

d) $\left(6x^3-7x^2-19x-7\right):\left(2x+1\right)$

a)
$$\begin{array}{l} \left(2a^2+a-6\right):\left(a+2\right)=2a-3 \\ -\left(2a^2+4a\right) \\ \qquad -3a-6 \\ \quad -\left(-3a-6\right) \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} \left(6x^2-x-2\right):\left(2x+1\right)=3x-2 \\ -\left(6x^2+3x\right) \\ \qquad -4x-2 \\ \quad -\left(-4x-2\right) \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{l} \left(2y^2-5y+6\right):\left(2y-3\right)=y-2 \\ -\left(2y^2-3y\right) \\ \qquad -2y+6 \\ \quad -\left(-2y+6\right) \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{l} \left(6x^3-7x^2-19x-7\right):\left(2x+1\right)=3x^2-5x-7 \\ -\left(6x^3+3x^2\right) \\ \quad -10x^2-19x-7 \\ \quad -\left(-10x^2-5x\right) \\ \qquad -14x-7 \\ \qquad -\left(-14x-7\right) \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Shrnutí: Mnohočlen dělíme mnohočlenem postupem, který vychází z písemného dělení.