

3.7.10 Umocňování mnohočlenů I

Předpoklady: 030709

Př. 1: Vyděl a výsledek ověř zkouškou. a) $(x^3 + 1) : (x + 1)$ b) $(2a^4 - a^2 + 3a) : (a + 3)$

$$\begin{array}{r} (x^3 + 1) : (x + 1) = x^2 - x + 1 \\ -(x^3 + x^2) \\ \hline -x^2 + 1 \\ -(-x^2 - x) \\ \hline x + 1 \\ -(x + 1) \\ \hline 0 \end{array}$$

Zkouška: $(x + 1) \cdot (x^2 - x + 1) = x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 = x^3 + 1$

$$\begin{array}{r} (2a^4 - a^2 + 3a) : (a + 3) = 2a^3 - 6a^2 + 17a - 48 \quad (\text{zbytek } 144) \\ -(2a^4 + 6a^3) \\ \hline -6a^3 - a^2 + 3a \\ -(-6a^3 - 18a^2) \\ \hline 17a^2 + 3a \\ -(17a^2 + 51a) \\ \hline -48a \\ -(-48a - 144) \\ \hline +144 \end{array}$$

Zkouška:

$$(a + 3) \cdot (2a^3 - 6a^2 + 17a - 48) + 144 = 2a^4 - 6a^3 + 17a^2 - 48a + 6a^3 - 18a^2 + 51a - 144 + 144 = 2a^4 - a^2 + 3a$$

Pedagogická poznámka: V obou bodech předchozího příkladu je největším problémem odečtení výsledků zpětného násobení v naprosté většině členů se dvěma zápornými znaménky (mínus mínus dává plus), proto při hledání chyby je nejvýhodnější zaměřit se nejdříve právě na tyto místa.

Př. 2: Zapiš jako jednu jednoduchou mocninu. Hledej vzorec $(a^m)^n =$.

a) $(2^2)^3$ b) $(3^2)^4$ c) $(a^3)^5$ d) $(x^n)^2$ e) $(y^3)^k$

a) $(2^2)^3 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$

b) $(3^2)^4 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^8$

c) $(a^3)^5 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{15}$

$$d) (x^n)^2 = x^n \cdot x^n = x^{n+n} = x^{2n}$$

$$e) (y^3)^k = \underbrace{y^3 \cdot y^3 \cdot \dots \cdot y^3}_{k \text{ krát}} = y^{3k}$$

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{n \text{ krát}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \cdot n \text{ krát}} = a^{m \cdot n}$$

Př. 3: Umocni jednočleny.

$$a) (ab)^3 \quad b) (x^2y)^2 \quad c) (3ab^2)^3 \quad d) (-2x^4y)^4 \quad e) (-3^2ab^3)^3$$

$$a) (ab)^3 = a^3b^3 \quad b) (x^2y)^2 = (x^2)^2 \cdot y^2 = x^4y^2 \quad c) (3ab^2)^3 = 3^3a^3(b^2)^3 = 3^3a^3b^6$$

$$d) (-2x^4y)^4 = (-2)^4 \cdot (x^4)^4 \cdot y^4 = 2^4x^{16}y^4 \text{ (sudá mocnina záporného čísla je kladné číslo)}$$

$$e) (-3^2ab^3)^3 = (-3^2)^3 \cdot a^3 \cdot (b^3)^3 = -3^6a^3b^9 \text{ (na druhou umocňujeme pouze číslo 3, až výsledek tohoto umocnění násobíme mínusem, lichá mocnina záporné čísla je záporné číslo)}$$

Pedagogická poznámka: Jediným zádrhelem jsou body d) a e) obsahující umocňování záporného čísla.

Př. 4: Vypočti.

$$a) (b+6)^2 \quad b) (2u-1)^2 \quad c) (3a+2)^2 \quad d) (4b-3)^2 \\ e) (2x+5)^2 \quad f) (2x-7)^2 \quad g) (xy+2)^2 \quad h) (2xy-5y)^2$$

$$a) (b+6)^2 = b^2 + 2 \cdot b \cdot 6 + 6^2 = b^2 + 12b + 36$$

$$b) (2u-1)^2 = (2u)^2 - 2 \cdot 2u \cdot 1 + 1^2 = 4u^2 - 4u + 1$$

$$c) (3a+2)^2 = (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot 2 + 2^2 = 9a^2 + 12a + 4$$

$$d) (4b-3)^2 = (4b)^2 - 2 \cdot 4b \cdot 3 + 3^2 = 16b^2 - 24b + 9$$

$$e) (2x+5)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 + 20x + 25$$

$$f) (2x-7)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 7 + 7^2 = 4x^2 + 28x + 49$$

$$g) (xy+2)^2 = (xy)^2 + 2 \cdot xy \cdot 2 + 2^2 = x^2y^2 + 4xy + 4$$

$$h) (2xy-5y)^2 = (2xy)^2 - 2 \cdot 2xy \cdot 5y + (5y)^2 = 4x^2y^2 - 20xy^2 + 25y^2$$

Př. 5: Doplň rámeček tak, aby rovnost platila.

a) $(x + \square)^2 = x^2 + 2x + 1$

b) $(x - \square)^2 = x^2 - 6x + 9$

c) $(x + \square)^2 = x^2 + 2x + 4$

d) $(3a + \square)^2 = 9a^2 + 12a + 4$

e) $(2k - \square)^2 = 4k^2 - 12kl + 9l^2$

Zkusíme upravit výrazy „z druhé strany“ – z umocněného tvaru vyrobíme vzorec.

a) $(y + \square)^2 = y^2 + 2y + 1 = y^2 + 2y \cdot 1 + 1^2 = (y + 1)^2 \Rightarrow \boxed{1}$

b) $(x - \square)^2 = x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2x \cdot 3 + 3^2 = (x - 3)^2 \Rightarrow \boxed{3}$

c) $(x + \square)^2 = x^2 + 2x + 4 = x^2 + 2x \cdot 1 + 2^2 \Rightarrow$ neexistuje číslo, které bychom mohli doplnit do čtverečku (podle prostředního členu bychom měli doplnit číslo 1, podle posledního členu číslo 2, což nemůžeme udělat najednou).

d) $(3a + \square)^2 = 9a^2 + 12a + 4 = (3a)^2 + 2 \cdot (3a) \cdot 2 + 2^2 = (3a + 2)^2 \Rightarrow \boxed{2}$

e) $(2k - \square)^2 = 4k^2 - 12kl + 9l^2 = (2k)^2 - 2 \cdot (2k) \cdot (3l) + (3l)^2 = (2k - 3l)^2 \Rightarrow \boxed{3l}$

Př. 6: Vypočti bez tabulek, kalkulačky i násobení pod sebou.

a) 22^2

b) 32^2

c) 29^2

d) 201^2

e) 499^2

a) $22^2 = (20 + 2)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 2 + 2^2 = 400 + 80 + 4 = 484$

b) $32^2 = (30 + 2)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 2 + 2^2 = 900 + 120 + 4 = 1024$

c) $29^2 = (30 - 1)^2 = 30^2 - 2 \cdot 30 \cdot 1 + 1^2 = 900 - 60 + 1 = 841$

d) $201^2 = (200 + 1)^2 = 200^2 + 2 \cdot 200 \cdot 1 + 1^2 = 40000 + 400 + 1 = 40401$

e) $499^2 = (500 - 1)^2 = 500^2 - 2 \cdot 500 \cdot 1 + 1^2 = 250\,000 - 1\,000 + 1 = 249\,001$

Shrnutí: