

### 3.7.11 Umocňování mnohočlenů II

**Předpoklady:** 030710

**Př. 1:** Umocni jednočleny.

a)  $(2a^2b)^3$                       b)  $(-3x^3y^2)^2$                       c)  $(-2^3xy^2)^3$

a)  $(2a^2b)^3 = 2^3 a^6 b^3 = 8a^6 b^3$                       b)  $(-3x^3y^2)^2 = 3^2 x^6 y^4 = 9x^6 y^4$

c)  $(-2^3xy^2)^3 = -2^9 x^3 y^6$

**Pedagogická poznámka:** Body b) a c) jsou ověřováním problémů z minulé hodiny. Pokud žák udělá chybu i tentokrát je s jeho způsobem odstraňování problémů něco v nepořádku.

**Př. 2:** Vypočti.

a)  $(3a+2)^2$                       b)  $(5x-7)^2$                       c)  $(2ab+1)^2$                       d)  $(3cx-2y)^2$

a)  $(3a+2)^2 = (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot 2 + 2^2 = 9a^2 + 12a + 4$

b)  $(5x-7)^2 = (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 7 + 7^2 = 25x^2 - 70x + 49$

c)  $(2ab+1)^2 = (2ab)^2 + 2 \cdot 2ab \cdot 1 + 1^2 = 4a^2b^2 + 4ab + 1$

d)  $(3cx-2y)^2 = (3cx)^2 - 2 \cdot 3cx \cdot 2y + (2y)^2 = 9c^2x^2 - 12cxy + 4y^2$

**Př. 3:** Vypočti.

a)  $(a^2-2c)^2$                       b)  $(xy^2-x^2y)^2$                       c)  $(-2x+3y)^2$                       d)  $(-3x^2y-4xy)^2$

a)  $(a^2-2c)^2 = (a^2)^2 - 2 \cdot a^2 \cdot 2c + (2c)^2 = a^4 - 4a^2c + 4c^2$

b)  $(xy^2-x^2y)^2 = (xy^2)^2 - 2 \cdot xy^2 \cdot x^2y + (x^2y)^2 = x^2y^4 - 2x^3y^3 + x^4y^2$

c)  $(-2x+3y)^2 = (-2x)^2 + 2(-2x) \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

jinak:  $(-2x+3y)^2 = (3y-2x)^2 = (3y)^2 - 2 \cdot 3y(-2x) + (-2x)^2 = 9y^2 - 12xy + 4x^2$

d)  $(-3x^2y-4xy)^2 = (-3x^2y)^2 + 2(-3x^2y)(-4xy) + (-4xy)^2 = 9x^4y^2 + 24x^3y^2 + 16x^2y^2$

jinak:  $(-3x^2y - 4xy)^2 = [(-1)(3x^2y + 4xy)]^2 = (-1)^2 (3x^2y + 4xy)^2 =$   
 $= (3x^2y)^2 + 2(3x^2y)(4xy) + (4xy)^2 = 9x^4y^2 + 24x^3y^2 + 16x^2y^2$

**Př. 4:** Doplně rámeček tak, aby rovnost platila.

a)  $(y - \square)^2 = y^2 - 2y + 1$

b)  $(a + \square)^2 = a^2 + 8a + 16$

c)  $(3x + \square)^2 = 3x^2 + 12x + 4$

d)  $(2k - \square)^2 = 4k^2 - 6kl + 9l^2$

a)  $(y - \square)^2 = y^2 - 2y + 1$ : poslední člen na pravé straně má být  $b^2 \Rightarrow b = 1$

Kontrola:  $(y - 1)^2 = y^2 - 2 \cdot y \cdot 1 + 1^2 = y^2 - 2y + 1$ .

b)  $(a + \square)^2 = a^2 + 8a + 16$ : poslední člen na pravé straně má být  $b^2 \Rightarrow b = 4$

Kontrola:  $(a + 4)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot 4 + 4^2 = a^2 + 8a + 16$ .

c)  $(3x + \square)^2 = 3x^2 + 12x + 4$ : poslední člen na pravé straně má být  $b^2 \Rightarrow b = 2$

Kontrola:  $(3x + \square)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4 \Rightarrow$  příklad nemá řešení, podařilo se nám vyrovnat pouze část mnohočlenu (první členy  $3x^2$  a  $9x^2$  se neshodují a shodovat se nebudou, protože dosazení členu do čtverečku je nijak neovlivňuje).

d)  $(2k - \square)^2 = 4k^2 - 6kl + 9l^2$ : poslední člen na pravé straně má být  $b^2 \Rightarrow b = 3l$

Kontrola:  $(2k - \square)^2 = (2k)^2 - 2 \cdot 2k \cdot 3l + (3l)^2 = 4k^2 - 12kl + 9l^2 \Rightarrow$  příklad nemá řešení, podařilo se nám vyrovnat pouze část mnohočlenu (prostřední členy  $6kl$  a  $12kl$  se neshodují a shodovat se nebudou, protože bychom měli dosadit zároveň  $l$  (kvůli prostřednímu členu) a  $3l$  (kvůli poslednímu členu)).

**Př. 5:** Odvoď vzorec pro  $(a + b)^3$  a s jeho pomocí vypočti.

a)  $(2x + 3)^3$

b)  $(3a - 2b)^3$

$$(a + b)^3 = (a + b)^2 (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Vzorec:  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

a)  $(2x + 3)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 3^2 + 3^3 = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$

b)  $(3a - 2b)^3 = [3a + (-2b)]^3 = (3a)^3 + 3(3a)^2 \cdot (-2b) + 3(3a)(-2b)^2 + (-2b)^3 =$   
 $= 27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3$

**Př. 6:** Odhadni bez výpočtu tvar vzorce  $(a-b)^3$ . Svůj odhad zkontroluj odvozením.

Vzorec pro umocnění dvojčlenu  $(a-b)^3$  bude podobný jako vzorec pro umocnění dvojčlenu  $(a+b)^3$ , lišit se bude pouze ve členech, kde je lichá mocnina  $b$ .

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Odvození:  $(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) =$   
 $a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

**Př. 7:** Vypočti  $(3x-2)^3$  pomocí vzorce: a)  $(a-b)^3$ ,                      b)  $(a+b)^3$ .

a)  $(3x-2)^3$  pomocí vzorce  $(a-b)^3$

$$(3x-2)^3 = (3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3x \cdot 2^2 - 2^3 = 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$$

b)  $(3x-2)^3$  pomocí vzorce  $(a+b)^3$

$$(3x-2)^3 = [3x + (-2)]^3 = (3x)^3 + 3 \cdot (3x)^2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3x \cdot (-2)^2 + (-2)^3 = 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$$

**Shrnutí:**