

3.7.11 Umocňování mnohočlenů II

Předpoklady: 030710

Př. 1: Umocni jednočleny.

a) $(2a^2b)^3$ b) $(-3x^3y^2)^2$ c) $(-2^3xy^2)^3$

a) $(2a^2b)^3 = 2^3 a^6 b^3 = 8a^6 b^3$ b) $(-3x^3y^2)^2 = 3^2 x^6 y^4 = 9x^6 y^4$

c) $(-2^3xy^2)^3 = -2^9 x^3 y^6$

Pedagogická poznámka: Body b) a c) jsou ověřováním problémů z minulé hodiny. Pokud žák udělá chybu i tentokrát, je s jeho způsobem odstraňování problémů něco v nepořádku.

Př. 2: Vypočti.

a) $(3a+2)^2$ b) $(5x-7)^2$ c) $(2ab+1)^2$ d) $(3cx-2y)^2$

a) $(3a+2)^2 = (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot 2 + 2^2 = 9a^2 + 12a + 4$

b) $(5x-7)^2 = (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 7 + 7^2 = 25x^2 - 70x + 49$

c) $(2ab+1)^2 = (2ab)^2 + 2 \cdot 2ab \cdot 1 + 1^2 = 4a^2b^2 + 4ab + 1$

d) $(3cx-2y)^2 = (3cx)^2 - 2 \cdot 3cx \cdot 2y + (2y)^2 = 9c^2x^2 - 12cxy + 4y^2$

Př. 3: Vypočti.

a) $(a^2-2c)^2$ b) $(xy^2-x^2y)^2$ c) $(-2x+3y)^2$ d) $(-3x^2y-4xy)^2$

a) $(a^2-2c)^2 = (a^2)^2 - 2 \cdot a^2 \cdot 2c + (2c)^2 = a^4 - 4a^2c + 4c^2$

b) $(xy^2-x^2y)^2 = (xy^2)^2 - 2 \cdot xy^2 \cdot x^2y + (x^2y)^2 = x^2y^4 - 2x^3y^3 + x^4y^2$

c) $(-2x+3y)^2 = (-2x)^2 + 2(-2x) \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

jinak: $(-2x+3y)^2 = (3y-2x)^2 = (3y)^2 - 2 \cdot 3y(-2x) + (-2x)^2 = 9y^2 - 12xy + 4x^2$

d) $(-3x^2y-4xy)^2 = (-3x^2y)^2 + 2(-3x^2y)(-4xy) + (-4xy)^2 = 9x^4y^2 + 24x^3y^2 + 16x^2y^2$

jinak: $(-3x^2y - 4xy)^2 = [(-1)(3x^2y + 4xy)]^2 = (-1)^2 (3x^2y + 4xy)^2 =$
 $= (3x^2y)^2 + 2(3x^2y)(4xy) + (4xy)^2 = 9x^4y^2 + 24x^3y^2 + 16x^2y^2$

Př. 4: Doplně rámeček tak, aby rovnost platila.

a) $(y - \square)^2 = y^2 - 2y + 1$

b) $(a + \square)^2 = a^2 + 8a + 16$

c) $(3x + \square)^2 = 3x^2 + 12x + 4$

d) $(2k - \square)^2 = 4k^2 - 6kl + 9l^2$

a) $(y - \square)^2 = y^2 - 2y + 1$: poslední člen na pravé straně má být $b^2 \Rightarrow b = 1$

Kontrola: $(y - 1)^2 = y^2 - 2 \cdot y \cdot 1 + 1^2 = y^2 - 2y + 1$.

b) $(a + \square)^2 = a^2 + 8a + 16$: poslední člen na pravé straně má být $b^2 \Rightarrow b = 4$

Kontrola: $(a + 4)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot 4 + 4^2 = a^2 + 8a + 16$.

c) $(3x + \square)^2 = 3x^2 + 12x + 4$: poslední člen na pravé straně má být $b^2 \Rightarrow b = 2$

Kontrola: $(3x + \square)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4 \Rightarrow$ příklad nemá řešení, podařilo se nám vyrovnat pouze část mnohočlenu (první členy $3x^2$ a $9x^2$ se neshodují a shodovat se nebudou, protože dosazení členu do čtverečku je nijak neovlivňuje).

d) $(2k - \square)^2 = 4k^2 - 6kl + 9l^2$: poslední člen na pravé straně má být $b^2 \Rightarrow b = 3l$

Kontrola: $(2k - \square)^2 = (2k)^2 - 2 \cdot 2k \cdot 3l + (3l)^2 = 4k^2 - 12kl + 9l^2 \Rightarrow$ příklad nemá řešení, podařilo se nám vyrovnat pouze část mnohočlenu (prostřední členy $6kl$ a $12kl$ se neshodují a shodovat se nebudou, protože bychom měli dosadit zároveň l (kvůli prostřednímu členu) a $3l$ (kvůli poslednímu členu)).

Př. 5: Odvoď vzorec pro $(a + b)^3$ a s jeho pomocí vypočti.

a) $(2x + 3)^3$

b) $(3a - 2b)^3$

$$(a + b)^3 = (a + b)^2 (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Vzorec: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

a) $(2x + 3)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 3^2 + 3^3 = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$

b) $(3a - 2b)^3 = [3a + (-2b)]^3 = (3a)^3 + 3(3a)^2 \cdot (-2b) + 3(3a)(-2b)^2 + (-2b)^3 =$
 $= 27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3$

Př. 6: Odhadni bez výpočtu tvar vzorce $(a-b)^3$. Svůj odhad zkontroluj odvozením.

Vzorec pro umocnění dvojčlenu $(a-b)^3$ bude podobný jako vzorec pro umocnění dvojčlenu $(a+b)^3$, lišit se bude pouze ve členech, kde je lichá mocnina b .

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Odvození: $(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) =$
 $a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Př. 7: Vypočti $(3x-2)^3$ pomocí vzorce: a) $(a-b)^3$, b) $(a+b)^3$.

a) $(3x-2)^3$ pomocí vzorce $(a-b)^3$

$$(3x-2)^3 = (3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3x \cdot 2^2 - 2^3 = 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$$

b) $(3x-2)^3$ pomocí vzorce $(a+b)^3$

$$(3x-2)^3 = [3x + (-2)]^3 = (3x)^3 + 3 \cdot (3x)^2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3x \cdot (-2)^2 + (-2)^3 = 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$$

Shrnutí: