3.7.12 Umocňování mnohočlenů III

Předpoklady: 030711

Pedagogická poznámka: Většinu hodiny představují příklady, které přesahují aktuální potřeby, ale rozvíjejí porozumění pro dosazování do vzorce a jejich odvozování. Pro slabší žáky nosím do hodiny další jednodušší příklady, ke kterým se vracíme po vyřešení příkladu 2.

Pedagogická poznámka: Pokud zbude jen trochu času, stojí za to, si na konci hodiny prohlédnout řešení posledního příkladu a zmínit se o výhodách promyšleného zápisu.

Př. 1: Umocni dvojčleny.

a) $(y+7)^2$ b) $(2a+b)^2$ c) $(3+xy)^2$ d) $(2x+y^2)^2$

a) $(y+7)^2 = y^2+2\cdot y\cdot 7+7^2 = y^2+14y+49$

b) $(2a+b)^2 = (2a)^2+2\cdot 2a\cdot b+b^2 = 4a^2+4ab+b^2$

c) $(3+xy)^2 = 3^2+2\cdot 3\cdot xy+(xy)^2 = 9+6xy+x^2y^2$

d) $(2x+y^2)^2 = (2x)^2+2\cdot 2x\cdot y^2+(y^2)^2 = 4x^2+4xy^2+y^4$

Př. 2: Vyřeš rovnice.

a) $(x-1)^2 = (x+3)^2$ b) $(3x-3)^2-(5x+1)(x-2) = (2x+3)^2$

a) $(x-1)^2 = (x+3)^2$

$x^2-2x+1 = x^2+6x+9 \quad /-x^2$

$-2x+1 = +6x+9 \quad /+2x-9$

$-8 = 8x \quad /:8$

$x = -1$ $\qquad K = \{-1\}$

b) $(3x-3)^2-(5x+1)(x-2) = (2x+3)^2$

$9x^2-18x+9-(5x^2-10x+x-2) = 4x^2+12x+9$

$4x^2-9x+11 = 4x^2+12x+9 \quad /-4x^2+9x-9$

$2 = 21x \quad /:21$

$x = \frac{2}{21}$ $\qquad K = \left\{\frac{2}{21}\right\}$

Př. 3: Prohledni si vzorce pro umocňování $(a+b)^2$ a $(a+b)^3$. Odhadni vzorec pro umocnění $(a+b)^4$. Odhad ověř výpočtem.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Odhad vzorce $(a+b)^4$:

- mocniny *a* budou klesat, mocniny *b* vzrůstat: $a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$,
- koeficient před druhým a předposledním členem se bude shodovat s mocninou závorky, u členů s jednou proměnnou bude koeficient 1, jen u prostředního členu nemáme jak odhadnou koeficient: $a^4 + 4a^3b + 8a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Odvození: $(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b) =$
$a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Př. 4: Odvoď vzorec pro $(a+b+c)^2$ a s jeho pomocí vypočti:

a) $(2x+3y+z)^2$ b) $(3a-2b-2c)^2$

$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2 =$
$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Vzorec: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

a) $(2x+3y+z)^2 = (2x)^2 + (3y)^2 + z^2 + 2\cdot(2x)(3y) + 2(2x)z + 2(3y)z =$
$= 4x^2 + 9y^2 + z^2 + 12xy + 4xz + 6yz$

$(3a-2b-2c)^2 = [3a + (-2b) + (-2c)]^2 =$

b) $= (3a)^2 + (-2b)^2 + (-2c)^2 + 2(3a)(-2b) + 2(3a)(-2c) + 2(-2b)(-2c) =$
$= 9a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 12ab - 12ac + 8bc$

Př. 5: Vypočti $(2x+y+3z)^2$ pomocí vzorce $(a+b)^2$. Hledej různé možnosti. Výsledek zkontroluj pomocí předchozího příkladu.

Závorka obsahuje tři členy, vzorec pouze dva $\Rightarrow$ dva členy si pomocí závorky spojíme do jednoho $\Rightarrow$ více možností.

$[(2x+y)+3z]^2 = (2x+y)^2 + 2\cdot(2x+y)\cdot 3z + (3z)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2 + 12xz + 6yz + 9z^2 =$
$= 4x^2 + y^2 + 9z^2 + 4xy + 12xz + 6yz$

Zadání příkladu je velmi podobné zadání bodu a) v předchozím příkladu, jsou pouze prohozeny koeficienty u proměnných *y* a *z* $\Rightarrow$ pokud ve výsledku prohodíme písmena *y* a *z* musíme získat výsledek bodu a) v předchozím příkladu.

Náš původní výsledek: $4x^2 + y^2 + 9z^2 + 4xy + 12xz + 6zyz$.

Prohození písmen y a z: $4x^2+9y^2+z^2+4xz+12xy+6yz$ (stejný výsledek $\Rightarrow$ správné řešení).

Jiný postup:
$$\left[2x+(y+3z)\right]^2=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot(y+3z)+(y+3z)^2=4x^2+4xy+12xz+y^2+6yz+9z^2=$$
$$=4x^2+y^2+9z^2+4xy+12xz+6yz$$

Př. 6: Vypočti $(a+2)^6$.

$$(a+2)^6=(a+2)^3(a+2)^3=(a^3+6a^2+12a+8)(a^3+6a^2+12a+8)=$$
$$=a^6+6a^5+12a^4+8a^3+$$
$$+6a^5+36a^4+72a^3+48a^2+$$
$$+12a^4+72a^3+144a^2+96a$$
$$+8a^3+48a^2+96a+64=$$
$$=a^6+12a^5+60a^4+160a^3+240a^2+192a+64$$

Př. 7: Spočítej ručně nebo pomocí kalkulačky druhé mocniny přirozených čísel, které mají jako poslední číslici 5 (například 15, 25, 35, 45, …). Pro tato čísla existuje jednoduchý trik, jak jejich druhou mocninu snadno určit. Najdi tento trik. Zdůvodni toto pravidlo pomocí rozkladu čísla na součet typu $(10\cdot a+5)$.

Druhé mocniny:

- $15^2=225$,
- $25^2=625$,
- $35^2=1225$,
- $45^2=2025$,
- …
- $95^2=9025$,
- …

Postřeh: poslední dvojčíslí druhé mocniny je číslo 25, zbytek druhé mocniny získáme tak, že vynásobíme číslo před pětkou s číslem o jedna vyšším. Například:
$15^2=1\cdot 2\cdot 100+25=225$,
$25^2=2\cdot 3\cdot 100+25=625$.
…

Zdůvodnění
Přirozené číslo končící na pětku můžeme napsat ve tvaru $10a+5$.
Například u čísla 35:
$$35=(30+5)^2=30^2+2\cdot 30\cdot 5+5^2=30\cdot(30+2\cdot 5)+25=3\cdot 10\cdot(30+10)+25=$$
$$=3\cdot 10\cdot(3+1)\cdot 10+25=3\cdot(3+1)\cdot 100+25$$
Výsledek se skládá z čísla 25 (poslední dvojčíslí) a čísla součinu čísla s číslem o jednu větším, který je vynásoben 100 (a tedy představuje až třetí a další cifry čísla od konce).

Shrnutí: