

3.7.12 Umocňování mnohočlenů III

Předpoklady: 030711

Pedagogická poznámka: Většinu hodiny představují příklady, které přesahují aktuální potřeby, ale rozvíjejí porozumění pro dosazování do vzorce a jejich odvozování. Pro slabší žáky nosím do hodiny další jednodušší příklady, ke kterým se vracíme po vyřešení příkladu 2.

Pedagogická poznámka: Pokud zbude jen trochu času, stojí za to, si na konci hodiny prohlédnout řešení posledního příkladu a zmínit se o výhodách promyšleného zápisu.

Př. 1: Umocni dvojčleny.

a) $(y+7)^2$ b) $(2a+b)^2$ c) $(3+xy)^2$ d) $(2x+y^2)^2$

a) $(y+7)^2 = y^2 + 2 \cdot y \cdot 7 + 7^2 = y^2 + 14y + 49$

b) $(2a+b)^2 = (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot b + b^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$

c) $(3+xy)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot xy + (xy)^2 = 9 + 6xy + x^2y^2$

d) $(2x+y^2)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + (y^2)^2 = 4x^2 + 4xy^2 + y^4$

Př. 2: Vyřeš rovnice.

a) $(x-1)^2 = (x+3)^2$ b) $(3x-3)^2 - (5x+1)(x-2) = (2x+3)^2$

a) $(x-1)^2 = (x+3)^2$

$x^2 - 2x + 1 = x^2 + 6x + 9 \quad / -x^2$

$-2x + 1 = +6x + 9 \quad / +2x - 9$

$-8 = 8x \quad / : 8$

$x = -1$

$K = \{-1\}$

b) $(3x-3)^2 - (5x+1)(x-2) = (2x+3)^2$

$9x^2 - 18x + 9 - (5x^2 - 10x + x - 2) = 4x^2 + 12x + 9$

$4x^2 - 9x + 11 = 4x^2 + 12x + 9 \quad / -4x^2 + 9x - 9$

$2 = 21x \quad / : 21$

$x = \frac{2}{21}$

$K = \left\{ \frac{2}{21} \right\}$

Př. 3: Prohlédni si vzorce pro umocňování $(a+b)^2$ a $(a+b)^3$. Odhadni vzorec pro umocnění $(a+b)^4$. Odhad ověř výpočtem.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Odhad vzorce $(a+b)^4$:

- mocniny a budou klesat, mocniny b vzrůstat: $a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$,
- koeficient před druhým a předposledním členem se bude shodovat s mocninou závorcky, u členů s jednou proměnnou bude koeficient 1, jen u prostředního členu nemáme jak odhadnout koeficient: $a^4 + 4a^3b + 8a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Odvození: $(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b) =$
 $a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Př. 4: Odvoď vzorec pro $(a+b+c)^2$ a s jeho pomocí vypočti:

a) $(2x+3y+z)^2$

b) $(3a-2b-2c)^2$

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2 =$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Vzorec: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

a) $(2x+3y+z)^2 = (2x)^2 + (3y)^2 + z^2 + 2 \cdot (2x)(3y) + 2(2x)z + 2(3y)z =$
 $= 4x^2 + 9y^2 + z^2 + 12xy + 4xz + 6yz$

$$(3a-2b-2c)^2 = [3a + (-2b) + (-2c)]^2 =$$

b) $= (3a)^2 + (-2b)^2 + (-2c)^2 + 2(3a)(-2b) + 2(3a)(-2c) + 2(-2b)(-2c) =$
 $= 9a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 12ab - 12ac + 8bc$

Př. 5: Vypočti $(2x+y+3z)^2$ pomocí vzorce $(a+b)^2$. Hledej různé možnosti. Výsledek zkontroluj pomocí předchozího příkladu.

Závorka obsahuje tři členy, vzorec pouze dva \Rightarrow dva členy si pomocí závorcky spojíme do jednoho \Rightarrow více možností.

$$[(2x+y)+3z]^2 = (2x+y)^2 + 2 \cdot (2x+y) \cdot 3z + (3z)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2 + 12xz + 6yz + 9z^2 =$$

$$= 4x^2 + y^2 + 9z^2 + 4xy + 12xz + 6yz$$

Zadání příkladu je velmi podobné zadání bodu a) v předchozím příkladu, jsou pouze prohozeny koeficienty u proměnných y a $z \Rightarrow$ pokud ve výsledku prohodíme písmena y a z musíme získat výsledek bodu a) v předchozím příkladu.

Náš původní výsledek: $4x^2 + y^2 + 9z^2 + 4xy + 12xz + 6yz$.

Prohození písmen y a z : $4x^2 + 9y^2 + z^2 + 4xz + 12xy + 6yz$ (stejný výsledek \Rightarrow správné řešení).

Jiný postup:

$$\begin{aligned} [2x + (y + 3z)]^2 &= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (y + 3z) + (y + 3z)^2 = 4x^2 + 4xy + 12xz + y^2 + 6yz + 9z^2 = \\ &= 4x^2 + y^2 + 9z^2 + 4xy + 12xz + 6yz \end{aligned}$$

Př. 6: Vypočti $(a+2)^6$.

$$\begin{aligned} (a+2)^6 &= (a+2)^3 (a+2)^3 = (a^3 + 6a^2 + 12a + 8)(a^3 + 6a^2 + 12a + 8) = \\ &= a^6 + 6a^5 + 12a^4 + 8a^3 + \\ &+ 6a^5 + 36a^4 + 72a^3 + 48a^2 + \\ &+ 12a^4 + 72a^3 + 144a^2 + 96a \\ &+ 8a^3 + 48a^2 + 96a + 64 = \\ &= a^6 + 12a^5 + 60a^4 + 160a^3 + 240a^2 + 192a + 64 \end{aligned}$$

Př. 7: Spočítej ručně nebo pomocí kalkulačky druhé mocniny přirozených čísel, které mají jako poslední číslici 5 (například 15, 25, 35, 45, ...). Pro tato čísla existuje jednoduchý trik, jak jejich druhou mocninu snadno určit. Najdi tento trik. Zdůvodni toto pravidlo pomocí rozkladu čísla na součet typu $(10 \cdot a + 5)$.

Druhé mocniny:

- $15^2 = 225$,
- $25^2 = 625$,
- $35^2 = 1225$,
- $45^2 = 2025$,
- ...
- $95^2 = 9025$,
- ...

Postřeh: poslední dvojčíslí druhé mocniny je číslo 25, zbytek druhé mocniny získáme tak, že vynásobíme číslo před pětkou s číslem o jedna vyšším. Například:

$$15^2 = 1 \cdot 2 \cdot 100 + 25 = 225,$$

$$25^2 = 2 \cdot 3 \cdot 100 + 25 = 625.$$

...

Zdůvodnění

Přirozené číslo končící na pětku můžeme napsat ve tvaru $10a + 5$.

Například u čísla 35:

$$\begin{aligned} 35 &= (30 + 5)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 5 + 5^2 = 30 \cdot (30 + 2 \cdot 5) + 25 = 3 \cdot 10 \cdot (30 + 10) + 25 = \\ &= 3 \cdot 10 \cdot (3 + 1) \cdot 10 + 25 = 3 \cdot (3 + 1) \cdot 100 + 25 \end{aligned}$$

Výsledek se skládá z čísla 25 (poslední dvojčíslí) a čísla součinu čísla s číslem o jednu větším, který je vynásoben 100 (a tedy představuje až třetí a další cifry čísla od konce).

Shrnutí:

