

3.7.14 Rozklad na součin I

Předpoklady: 030713

Př. 1: Vypočti.

a) $(3x+5)^2$

b) $(2a^2-5b)^2$

c) $(-xy+2y^2)^2$

a) $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5 + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$

b) $(2a^2-5b)^2 = (2a^2)^2 - 2 \cdot 2a^2 \cdot 5b + (5b)^2 = 4a^4 - 20a^2b + 25b^2$

c) $(-xy+2y^2)^2 = (-xy)^2 + 2 \cdot (-xy)(2y^2) + (2y^2)^2 = x^2y^2 - 4xy^3 + 4y^4$

O co jde při rozkladu na součin?

Dosud jsme se snažili závorky odstraňovat roznásobováním:

- $2(2x-y) = 4x-2y$,
- $x(2x^2-3x+1) = 2x^3-3x^2+x$,
- $(x-2)(2x+1) = 2x^2+x-4x-2 = 2x^2-3x-2$,
- ...

Někdy to bylo pracné, ale vždy jsme měli jednoznačný postup, jak dojít k výsledku (násobíme každý s každým, sečíst členy stejného typu).

Při rozkladu na součin postupujeme opačným směrem: z mnohočlenu se snažíme vytvořit součin více členů (místo abychom závorky odstraňovali, vytváříme je). Stačilo by naše předchozí příklady obrátit zprava doleva:

- $4x-2y = 2(2x-y)$,
- $2x^3-3x^2+x = x(2x^2-3x+1)$,
- $2x^2-3x-2 = 2x^2-4x+x-2 = 2x(x-2)+1 \cdot (x-2) = (x-2)(2x+1)$,
- ...

První dva příklady nejsou obtížné, za to třetí rozhodně není jednoduchý, musíme totiž odhadnout, že máme rozepsat člen $-3x$ takto $-3x = -4x + x$, což není nic jednoznačného ani dopředu jasného.

Nejčastěji používanou metodou je vytýkání před závorku, při kterém se snažíme napsat před závorku největší společný činitel všech jednočlenů v mnohočlenu (vytýkáme všechno, co jde). Správnost rozkladu si můžeme ověřit zpětným vynásobením.

Př. 2: Vytkni před závorku. Výsledek ověř zpětným násobením.

a) x^2+3x

b) $15a+20b$

c) $3y^2+6y$

d) $4x^2-6x$

a) $x^2+3x = x(x+3)$

Kontrola: $x(x+3) = x^2+3x$.

b) $15a + 20b = 5(3a + 4b)$ Kontrola: $5(3a + 4b) = 15a + 20b$.

c) $3y^2 + 6y = 3y(y + 2)$ Kontrola: $3y(y + 2) = 3y^2 + 6y$.

d) $4x^2 - 6x = 2x \cdot (2x - 3)$ Kontrola: $2x(2x - 3) = 4x^2 - 6x$.

Dodatek: Vytýkat nemusíme najednou, ale příklad můžeme řešit i postupně:

$$4x^2 - 6x = x(4x - 6) = 2x(2x - 3)$$

Pedagogická poznámka: Kontrola je v této fázi důležitá, upevňuje vědomí, že tvar s vytknutím před závorku je to samé jako původní mnohočlen.

Př. 3: Vytkni před závorku.

a) $6x + 3$

b) $8a^3 + 6a$

c) $y^2 - 2y$

d) $12a^3 - 8a^2$

e) $2a^2b - 6ab + 4ab^2$

f) $12x^3y - 4x^2 - 16x^3$

g) $20x^6y^3 - 15x^3y^3 + 5x^7y^4$

a) $6x + 3 = 3(2x + 1)$

b) $8a^3 + 6a = 2a(4a^2 + 3)$

c) $y^2 - 2y = y(y - 2)$

d) $12a^3 - 8a^2 = 4a^2(3a - 2)$

e) $2a^2b - 6ab + 4ab^2 = 2ab(a - 3 + 2b)$

f) $12x^3y - 4x^2 - 16x^3 = 4x^2(3xy - 1 - 4x)$

g) $20x^6y^3 - 15x^3y^3 + 5x^7y^4 = 5x^3y^3(4x^3 - 3 + x^4y)$

Př. 4: Vytkni z následujících mnohočlenů před závorku číslo -1 . Vytknutí ověř zpětným roznásobením. Popiš, jak se změní obsah závorky, když z ní vytkneme „mínus“.

a) $-a - b$

b) $1 - 2b$

c) $x - 3$

a) $-a - b = -(a + b)$ Kontrola: $-(a + b) = -a - b$

b) $1 - 2b = -(-1 + 2b)$ Kontrola: $-(-1 + 2b) = 1 - 2b$

c) $x - 3 = -(-x + 3)$ Kontrola: $-(-x + 3) = x - 3$

Ve všech případech postupujeme stejně: vytknutím „mínus“ před závorku změníme znaménka všech členů původního mnohočlenu.

Př. 5: Vytkni z následujících mnohočlenů před závorku číslo -1 . Pokud je možné vytknout i něco jiného, vytkni to také.

- a) $a - 2b$ b) $3 - 4x$ c) $-3 - x$ d) $x^2 - y^2$
e) $3a^2 - 6a + 9$ f) $-7x^2y + 8xy - 16y^2$ g) $3x^2y - 2xy + 5x - 7$

- a) $a - 2b = -(-a + 2b)$
b) $3 - 4x = -(-3 + 4x)$
c) $-3 - x = -(3 + x)$
d) $x^2 - y^2 = -(-x^2 + y^2)$
e) $3a^2 - 6a + 9 = -3(-a^2 + 2a - 3)$
f) $-7x^2y + 8xy - 16y^2 = -y(7x^2 - 8x - 16y)$
g) $3x^2y - 2xy + 5x - 7 = -(-3x^2y + 2xy - 5x + 7)$

V některých případech se zdá, že z mnohočlenu není co vytknout: $2xy + 4x + 3y + 6$.

V takovém případě zkusíme vytknout ze dvou částí alespoň něco:

$$2xy + 4x + 3y + 6 = 2x(y + 2) + 3(y + 2)$$

Ještě nejsme hotoví, zatím máme pořád součet dvou členů, ale oba už mají něco společného: modrou závorku $(y + 2)$: $2xy + 4x + 3y + 6 = 2x(y + 2) + 3(y + 2) \Rightarrow$ modrá závorka je teď společným činitelem, který můžeme vytknout:

$2xy + 4x + 3y + 6 = 2x(y + 2) + 3(y + 2) = (y + 2) \cdot (2x + 3)$. Jsme hotoví, získali jsme součin dvou mnohočlenů.

Tento postu pse označuje jako **postupné vytýkání**.

Př. 6: Rozlož na součin.

- a) $xa + xb + ya + yb$ b) $xa - 2x + 3a - 6$ c) $x^2 - xy + 3x - 3y$
d) $x^3 - 2x^2 + 3x - 6$ e) $2y^3 + 3y^2 + 4y + 6$ f) $a^4 + 3a^3 + a^2 + 3a$

- a) $xa + xb + ya + yb = x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$
b) $xa - 2x + 3a - 6 = x(a - 2) + 3(a - 2) = (a - 2)(x + 3)$
c) $x^2 - xy + 3x - 3y = x(x - y) + 3(x - y) = (x - y)(x + 3)$
d) $x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = x^2(x - 2) + 3(x - 2) = (x - 2)(x^2 + 3)$
e) $2y^3 + 3y^2 + 4y + 6 = y^2(2y + 3) + 2(2y + 3) = (2y + 3)(y^2 + 2)$
f) $a^4 + 3a^3 + a^2 + 3a = a^3(a + 3) + a(a + 3) = (a + 3)(a^3 + a) = (a + 3)a(a^2 + 1)$

Př. 7: Při umocňování platí $(x - 3)^2 = (3 - x)^2$. Ověř rovnost násobením a dokaž pomocí vytýkání mínusu před závorku.

$$(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$(3 - x)^2 = 9 - 6x + x^2 = x^2 - 6x + 9$$

Důkaz vytknutím mínusu: $(x-3)^2 = [-(3-x)]^2 = (-1)^2 (3-x)^2 = 1 \cdot (3-x)^2 = (3-x)^2$.

Shrnutí: Při rozkladu mnohočlenů se snažíme z jednoho mnohočlenu vytvořit součin více mnohočlenů.