

### 3.7.15 Rozklad na součin II

**Předpoklady:** 030714

**Př. 1:** Rozlož na součin.

a)  $x^2 - xy$

b)  $x^3 + x^2 + x$

c)  $2a^2 - 4a$

d)  $3a^3 + 6a^2 - 15a$

a)  $x^2 - xy = x(x - y)$

b)  $x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1)$

c)  $2a^2 - 4a = 2a(a - 2)$

d)  $3a^3 + 6a^2 - 15a = 3a(a^2 + 2a - 5)$

**Př. 2:** Vytkni z mnohočlenů mínus.

a)  $-a + 4$

b)  $x^2 - 2x$

c)  $7 - a$

d)  $-b^2 + 5b + 3$

a)  $-a + 4 = -(a - 4)$

b)  $x^2 - 2x = -(-x^2 + 2x) = -(2x - x^2)$

c)  $7 - a = -(a - 7)$

d)  $-b^2 + 5b + 3 = -(b^2 - 5b - 3)$

**Př. 3:** Rozlož na součin.

a)  $xy + 2x + 3y + 6$

b)  $x^2y + x^2 + 2y + 2$

c)  $x^3 - 2x^2 - 3x + 6$

a)  $xy + 2x + 3y + 6 = x(y + 2) + 3(y + 2) = (y + 2)(x + 3)$

b)  $x^2y + x^2 + 2y + 2 = x^2(y + 1) + 2(y + 1) = (y + 1)(x^2 + 2)$

c)  $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = x^2(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x^2 - 3)$

**Pedagogická poznámka:** V hodině následující výklad vynechávám a problém s jedničkou na „prázdném“ místě řešíme na bodu 4 a). Naprostá většina žáků ho řeší změnou pořadí členů. Přepíšeme si toto řešení na tabuli a pak pod něj postupujeme bez změny pořadí členů. Před druhým vytýkáním postup na tabuli zastavím a nechám žáky pokračovat samostatně. Často žáci postupují špatně  $a(2a - b) + (2a - b) = (2a - b) \cdot a$ , o čemž se rychle přesvědčíme roznásobením a porovnáním s výsledkem původního postupu. Pak se bavíme o tom, kde se jednička ve správném výsledku vzala.

Existuje typ příkladů na rozklad na součin, ve kterém se často dělají chyby. Zkusíme rozložit na součin výraz:  $2a^2 - ab + 2a - b$ .

Většinou si řešitel přehodí pořadí členů:

$$2a^2 - ab + 2a - b = 2a^2 + 2a - ab - b = 2a(a+1) - b(a+1) = (a+1)(2a-b).$$

Příklad však můžeme řešit i v původním pořadí:

$$2a^2 - ab + 2a - b = a(2a-b) + (2a-b) = (2a-b)(a+1).$$

Kde se vzala v druhé závorce jednička? Určitě tam být musí (jinak bychom nezískali stejný výsledek jako u druhého postupu), ale ve tvaru před znaménkem = se žádná jednička nevyskytuje.

Jednička v tvaru před vytknutím  $a(2a-b) + (2a-b)$  není, ale můžeme si ji tam snadno připsat, protože vynásobením jednou se číslo nezmění:

$$a(2a-b) + (2a-b) \cdot 1 = (2a-b)(a+1).$$

**Př. 4:** Rozlož na součin.

a)  $xy - 2y + x - 2$

b)  $x^3 + x^2 + x + 1$

c)  $x^2 + 2xy + 2y + x$

d)  $y^2 + yx - x - y$

e)  $y^2 - 2xy - 2x + y$

f)  $2x^2 - 2xy - x + y$

a)  $xy - 2y + x - 2 = y(x-2) + (x-2) \cdot 1 = (x-2)(y+1)$

b)  $x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x+1) + (x+1) = (x+1)(x^2+1)$

c)  $x^2 + 2xy + 2y + x = x(x+2y) + (2y+x) = (x+2y)(x+1)$

d)  $y^2 + yx - x - y = y(y+x) - (x+y) = (x+y)(y-1)$

e)  $y^2 - 2xy - 2x + y = y(y-2x) + (-2x+y) = (y-2x)(y+1)$

f)  $2x^2 - 2xy - x + y = 2x(x-y) - (x-y) = (x-y)(2x-1)$

**Př. 5:** Rozlož na součin mnohočleny.

a)  $3ab^2 + 3abc - b - c$

b)  $x^3 - 4x^2 + 4x$

c)  $a^3b + 3a^2b - b^2a - 3b^2$

a)  $3ab^2 + 3abc - b - c = 3ab(b+c) - (b+c) = (b+c)(3ab-1)$

b)  $x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2) = x(x-2)^2$

c)  $a^3b + 3a^2b - b^2a - 3b^2 = b(a^3 + 3a^2 - ba - 3b) = b[a^2(a+3) - b(a+3)] = b(a+3)(a^2 - b)$

**Př. 6:** Každé sudé číslo můžeme zapsat ve tvaru  $2k$ . Najdi hodnotu  $k$  pro číslo 84. Jakým způsobem je možné analogicky zapsat každé liché číslo?

$84 = 2 \cdot 42 \Rightarrow$  pro 84, je číslo  $k = 42$ .

Liché číslo je vždy o 1 větší než předcházející sudé číslo  $\Rightarrow$  každé liché číslo je možné zapsat jako  $2k+1$ .

**Př. 7:** S vyžitím zápisů z předchozího příkladu dokaž:

- Součet dvou sudých čísel je číslo sudé.
- Součet dvou lichých čísel je číslo sudé.
- Součet sudého a lichého čísla je číslo liché.
- Součin sudého a lichého čísla je číslo sudé.
- Součin dvou lichých čísel je číslo liché.
- Druhá mocnina sudého čísla je dělitelná čtyřmi.

a) Součet dvou sudých čísel je číslo sudé.

První sudé číslo:  $2k$ .

Druhé sudé číslo:  $2l$ .

Součet obou čísel:  $2k + 2l = 2(k + l) \Rightarrow$  výsledné číslo je opět zapsáno v tvaru  $2 \cdot ( \quad )$  a je tedy sudé.

b) Součet dvou lichých čísel je číslo sudé.

První liché číslo:  $2k + 1$ .

Druhé liché číslo:  $2l + 1$ .

Součet obou čísel:  $2k + 1 + 2l + 1 = 2k + 2l + 2 = 2(k + l + 1) \Rightarrow$  výsledné číslo je zapsáno v tvaru  $2 \cdot ( \quad )$  a je tedy sudé.

c) Součet sudého a lichého čísla je číslo liché.

První sudé číslo:  $2k$ .

Druhé liché číslo:  $2l + 1$ .

Součet obou čísel:  $2k + 2l + 1 = 2(k + l) + 1 \Rightarrow$  výsledné číslo je zapsáno v tvaru  $2 \cdot ( \quad ) + 1$  a je tedy liché.

d) Součin sudého a lichého čísla je číslo sudé.

První sudé číslo:  $2k$ .

Druhé liché číslo:  $2l + 1$ .

Součin obou čísel:  $2k \cdot (2l + 1) = 2 \cdot [k \cdot (2l + 1)] \Rightarrow$  výsledné číslo je zapsáno v tvaru  $2 \cdot ( \quad )$  a je tedy sudé.

e) Součin dvou lichých čísel je číslo liché.

První liché číslo:  $2k + 1$ .

Druhé liché číslo:  $2l + 1$ .

Součin obou čísel:  $(2k + 1)(2l + 1) = 4kl + 2k + 2l + 1 = 2(2kl + k + l) + 1 \Rightarrow$  výsledné číslo je zapsáno v tvaru  $2 \cdot ( \quad ) + 1$  a je tedy liché.

f) Druhá mocnina sudého čísla je dělitelná čtyřmi.

Sudé číslo:  $2k$ .

Jeho druhá mocnina:  $(2k)^2 = 4k^2 \Rightarrow$  výsledné číslo je zapsáno ve tvaru  $4 \cdot ( \quad )$  a je tedy násobkem čtyř.

**Pedagogická poznámka:** V bodu a) se často objevuje nesprávné  $2k + 2k$ . Bavíme se o tom, co by znamenalo, kdyby byly oba členy se stejným písmenem.

**Př. 8:** Umocni (ve vhodných situacích zjednoduš výpočet vytknutím  $-1$ ).

a)  $(2x-3)^2$       b)  $(-x-3)^2$       c)  $(-3s+5)^2$       d)  $(-4-3a)^2$

a)  $(2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$

b)  $(-x-3)^2 = [(-1)(x+3)]^2 = (-1)^2 (x+3)^2 = 1 \cdot (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

c)  $(-3s+5)^2 = [(-1)(3s-5)]^2 = (3s-5)^2 = 9s^2 - 30s + 25$

d)  $(-4-3a)^2 = [(-1)(4+3a)]^2 = (4+3a)^2 = 16 + 24a + a^2$

**Dodatek:** U předchozího způsobu zápisu není vytknutí mínus před závorku při umocňování velkým ulehčením, ale pokud si pamatujeme, že při umocňování vytknuté mínus zmizí, můžeme psát daleko úsporněji  $(-x-3)^2 = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ .

**Shrnutí:** Při vytýkání mínus před závorku se obrátí znaménka všech členů uvnitř závorky.