3.7.15 Rozklad na součin II

Předpoklady: 030714

Př. 1: Rozlož na součin.
a) $x^2 - xy$ b) $x^3 + x^2 + x$ c) $2a^2 - 4a$ d) $3a^3 + 6a^2 - 15a$

a) $x^2 - xy = x(x - y)$

b) $x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1)$

c) $2a^2 - 4a = 2a(a - 2)$

d) $3a^3 + 6a^2 - 15a = 3a(a^2 + 2a - 5)$

Př. 2: Vytkni z mnohočlenů mínus.
a) $-a + 4$ b) $x^2 - 2x$ c) $7 - a$ d) $-b^2 + 5b + 3$

a) $-a + 4 = -(a - 4)$

b) $x^2 - 2x = -(-x^2 + 2x) = -(2x - x^2)$

c) $7 - a = -(a - 7)$

d) $-b^2 + 5b + 3 = -(b^2 - 5b - 3)$

Př. 3: Rozlož na součin.
a) $xy + 2x + 3y + 6$ b) $x^2y + x^2 + 2y + 2$ c) $x^3 - 2x^2 - 3x + 6$

a) $xy + 2x + 3y + 6 = x(y + 2) + 3(y + 2) = (y + 2)(x + 3)$
b) $x^2y + x^2 + 2y + 2 = x^2(y + 1) + 2(y + 1) = (y + 1)(x^2 + 2)$
c) $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = x^2(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x^2 - 3)$

Pedagogická poznámka: V hodině následující výklad vynechávám a problém s jedničkou na „prázdném“ místě řešíme na bodu 4 a). Naprostá většina žáků ho řeší změnou pořadí členů. Přepíšeme si toto řešení na tabuli a pak pod něj postupujeme bez změny pořadí členů. Před druhým vytýkáním postup na tabuli zastavím a nechám žáky pokračovat samostatně. Často žáci postupují špatně $a(2a - b) + (2a - b) = (2a - b) \cdot a$, o čemž se rychle přesvědčíme roznásobením a porovnáním s výsledkem původního postupu. Pak se bavíme o tom, kde se jednička ve správném výsledku vzala.

Existuje ty příkladů na rozklad na součin, ve kterém se často dělají chyby. Zkusíme rozložit na součin výraz: $2a^2 - ab + 2a - b$.

Většinou si řešitel přehodí pořadí členů:

$2a^2 - ab + 2a - b = 2a^2 + 2a - ab - b = 2a(a+1) - b(a+1) = (a+1)(2a-b)$.

Příklad však můžeme řešit i v původním pořadí:

$2a^2 - ab + 2a - b = a(2a-b) + (2a-b) = (2a-b)(a+1)$.

Kde se vzala v druhé závorce jednička? Určitě tam být musí (jinak bychom nezískali stejný výsledek jako u druhého postupu), ale ve tvaru před znaménkem = se žádná jednička nevyskytuje.

Jednička v tvaru před vytknutím $a(2a-b) + (2a-b)$ není, ale můžeme si ji tam snadno připsat, protože vynásobením jednou se číslo nezmění:

$a(2a-b) + (2a-b) \cdot 1 = (2a-b)(a+1)$.

Př. 4: Rozlož na součin.

a) $xy - 2y + x - 2$ b) $x^3 + x^2 + x + 1$ c) $x^2 + 2xy + 2y + x$

d) $y^2 + yx - x - y$ e) $y^2 - 2xy - 2x + y$ f) $2x^2 - 2xy - x + y$

a) $xy - 2y + x - 2 = y(x-2) + (x-2) \cdot 1 = (x-2)(y+1)$

b) $x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x+1) + (x+1) = (x+1)(x^2+1)$

c) $x^2 + 2xy + 2y + x = x(x+2y) + (2y+x) = (x+2y)(x+1)$

d) $y^2 + yx - x - y = y(y+x) - (x+y) = (x+y)(y-1)$

e) $y^2 - 2xy - 2x + y = y(y-2x) + (-2x+y) = (y-2x)(y+1)$

f) $2x^2 - 2xy - x + y = 2x(x-y) - (x-y) = (x-y)(2x-1)$

Př. 5: Rozlož na součin mnohočleny.

a) $3ab^2 + 3abc - b - c$ b) $x^3 - 4x^2 + 4x$ c) $a^3b + 3a^2b - b^2a - 3b^2$

a) $3ab^2 + 3abc - b - c = 3ab(b+c) - (b+c) = (b+c)(3ab-1)$

b) $x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2) = x(x-2)^2$

c) $a^3b + 3a^2b - b^2a - 3b^2 = b(a^3 + 3a^2 - ba - 3b) = b\left[a^2(a+3) - b(a+3)\right] = b(a+3)(a^2 - b)$

Př. 6: Každé sudé číslo můžeme zapsat ve tvaru $2k$. Najdi hodnotu k pro číslo 84. Jakým způsobem je možné analogicky zapsat každé liché číslo?

$84 = 2 \cdot 42$ $\Rightarrow$ pro 84, je číslo $k = 42$.

Liché číslo je vždy o 1 větší než předcházející sudé číslo $\Rightarrow$ každé liché číslo je možné zapsat jako $2k+1$.

Př. 7: S vyžitím zápisů z předchozího příkladu dokaž:
a) Součet dvou sudých čísel je číslo sudé.
b) Součet dvou lichých čísel je číslo sudé.
c) Součet sudého a lichého čísla je číslo liché.
d) Součin sudého a lichého čísla je číslo sudé.
e) Součin dvou lichých čísel je číslo liché.
f) Druhá mocnina sudého čísla je dělitelná čtyřmi.

a) Součet dvou sudých čísel je číslo sudé.
První sudé číslo: $2k$.
Druhé sudé číslo: $2l$.
Součet obou čísel: $2k+2l=2(k+l)$ $\Rightarrow$ výsledné číslo je opět zapsáno v tvaru $2\cdot(\ )$ a je tedy sudé.

b) Součet dvou lichých čísel je číslo sudé.
První liché číslo: $2k+1$.
Druhé liché číslo: $2l+1$.
Součet obou čísel: $2k+1+2l+1=2k+2l+2=2(k+l+1)$ $\Rightarrow$ výsledné číslo je zapsáno v tvaru $2\cdot(\ )$ a je tedy sudé.

c) Součet sudého a lichého čísla je číslo liché.
První sudé číslo: $2k$.
Druhé liché číslo: $2l+1$.
Součet obou čísel: $2k+2l+1=2(k+l)+1$ $\Rightarrow$ výsledné číslo je zapsáno v tvaru $2\cdot(\ )+1$ a je tedy liché.

d) Součin sudého a lichého čísla je číslo sudé.
První sudé číslo: $2k$.
Druhé liché číslo: $2l+1$.
Součin obou čísel: $2k\cdot(2l+1)=2\cdot\left[k\cdot(2l+1)\right]$ $\Rightarrow$ výsledné číslo je zapsáno v tvaru $2\cdot(\ )$ a je tedy sudé.

e) Součin dvou lichých čísel je číslo liché.
První liché číslo: $2k+1$.
Druhé liché číslo: $2l+1$.
Součin obou čísel: $(2k+1)(2l+1)=4kl+2k+2l+1=2(2kl+k+l)+1$ $\Rightarrow$ výsledné číslo je zapsáno v tvaru $2\cdot(\ )+1$ a je tedy liché.

f) Druhá mocnina sudého čísla je dělitelná čtyřmi.
Sudé číslo: $2k$.
Jeho druhá mocnina: $(2k)=4k^2$ $\Rightarrow$ výsledné číslo je zapsáno ve tvaru $4\cdot(\ )$ a je tedy násobkem čtyř.

Pedagogická poznámka: V bodu a) se často objevuje nesprávné $2k+2k$. Bavíme se o tom, co by znamenalo, kdyby byly oba členy se stejným písmenem.

Př. 8: Umocni (ve vhodných situacích zjednoduš výpočet vytknutím –1).

a) $(2x-3)^2$ b) $(-x-3)^2$ c) $(-3s+5)^2$ d) $(-4-3a)^2$

a) $(2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$

b) $(-x-3)^2 = [(-1)(x+3)]^2 = (-1)^2 (x+3)^2 = 1 \cdot (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

c) $(-3s+5)^2 = [(-1)(3s-5)]^2 = (3s-5)^2 = 9s^2 - 30s + 25$

d) $(-4-3a)^2 = [(-1)(4+3a)]^2 = (4+3a)^2 = 16 + 24a + a^2$

Dodatek: U předchozího způsobu zápisu není vytknutí mínus před závorku při umocňování velkým ulehčením, ale ho pokud si pamatujeme, že při umocňování vytknuté mínus zmizí, můžeme psát daleko úsporněji $(-x-3)^2 = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$.

Shrnutí: Při vytýkání mínus před závorku se obrátí znaménka všech členů uvnitř závorky.