3.5.2 Definiční obor I

Předpoklady: 030501

Př. 1: Vypočti. Výsledky uveď také jako složené číslo.

a) $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}$ b) $\frac{5}{6}:\frac{15}{24}$ c) $2-4\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$ d) $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{12}{25}}$

a) $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}+\frac{3\cdot 3}{5\cdot 3}=\frac{10+9}{15}=\frac{19}{15}=1\frac{4}{15}$

b) $\frac{5}{6}:\frac{15}{24}=\frac{5}{6}\cdot\frac{24}{15}=\frac{5}{6}\cdot\frac{6\cdot 4}{5\cdot 3}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$

c) $2-4\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=2-4\cdot\left(\frac{4}{3\cdot 4}-\frac{3}{4\cdot 3}\right)=2-4\cdot\frac{1}{12}=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$

d) $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{12}{25}}=\frac{4\cdot 25}{5\cdot 12}=\frac{4\cdot 5\cdot 5}{5\cdot 3\cdot 4}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$

Př. 2: Je dán lomený výraz $\frac{a-2}{a^2-a}$.

a) Urči jeho čitatel a jmenovatel.
b) Zapiš ho bez zlomkové čáry.
c) Urči jeho hodnotu pro $a\in\{-2;0;2;10\}$.

a) $\frac{a-2}{a^2-a}$:

- čitatel: $a-2$,
- jmenovatel: a^2-a

b) $\frac{a-2}{a^2-a}=(a-2):(a^2-a)$

c) hodnoty:

- $a=-2$: $\frac{a-2}{a^2-a}=\frac{-2-2}{(-2)^2-(-2)}=\frac{-4}{4+2}=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$,
- $a=0$: $\frac{a-2}{a^2-a}=\frac{0-2}{(0)^2-(0)}=\frac{-2}{0}$ - nedává smysl, nejde dělit nulou,

- $a = 2$: $\dfrac{a-2}{a^2-a} = \dfrac{2-2}{2^2-2} = \dfrac{0}{6} = 0$,
- $a = 10$: $\dfrac{a-2}{a^2-a} = \dfrac{10-2}{10^2-10} = \dfrac{8}{90} = \dfrac{4}{45}$.

Co se stalo, když jsme se pokusili do výrazu $\dfrac{a-2}{a^2-a}$ dosadit $a = 0$? Ve jmenovateli se objevila 0, ale to se nesmí stát, protože nulou nelze dělit.

Říkáme:

- **výraz $\dfrac{a-2}{a^2-a}$ není pro $a = 0$ definován (nemá pro $a = 0$ smysl),**
- **výraz $\dfrac{a-2}{a^2-a}$ je definován pro $a = 2$ (má pro $a = 2$ smysl).**

Př. 3: Existují ještě další reálná čísla, pro která nemá výraz $\dfrac{a-2}{a^2-a}$ smysl?

Dalším takovým číslem je číslo 1, protože po jeho dosazení bychom ve jmenovateli také dostali 0.

$\dfrac{a-2}{a^2-a} = \dfrac{1-2}{1^2-1} = \dfrac{-1}{0}$

Skutečnost, že výraz $\dfrac{a-2}{a^2-a}$ je definován pro všechna reálná čísla kromě čísel 0 a 1 zapisujeme pomocí podmínek $\dfrac{a-2}{a^2-a}\left(a \neq 0;\, a \neq 1\right)$, případně $\dfrac{a-2}{a^2-a}\left(a \neq 0;1\right)$.

Př. 4: Zapiš podmínky, za kterých jsou definovány následující lomené výrazy.

a) $\dfrac{2}{x+3}$ b) $\dfrac{x}{x+1}$ c) $\dfrac{x-2}{3}$ d) $\dfrac{2}{3x+2}$ e) $\dfrac{x+2}{(x-1)(x+3)}$

a) $\dfrac{2}{x+3}$: $x+3 \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq -3$.

b) $\dfrac{x}{x+1}$: $x+1 \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq -1$.

c) $\dfrac{x-2}{3}$: žádná podmínka, jmenovatel neobsahuje proměnnou.

d) $\dfrac{2}{3x+2}$: $3x+2 \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq -\dfrac{2}{3}$.

e) $\dfrac{x+2}{(x-1)(x+3)}$: ve jmenovateli je součin dvou závorek, pokud je jedna z nich rovna nule, nezáleží na tom, jaké číslo vyjde v druhé závorce:

- $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$,
- $x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$,

$\Rightarrow$ celkové podmínky $x \neq -3; 1$.

Př. 5: Zapiš podmínky, za kterých jsou definovány následující lomené výrazy.

a) $\dfrac{2x}{x(x-2)}$ b) $\dfrac{x}{x(2x+1)(1-3x)}$ c) $\dfrac{a+3}{a^2-3a}$ d) $\dfrac{x+2}{x^2-1}$

Podobné poslednímu bodu v předchozím příkladu $\Rightarrow$ pokud jsou závorky v součinu, hledáme podmínky pro každou zvlášť.

a) $\dfrac{2x}{x(x-2)}$: $x \neq 0; 2$.

b) $\dfrac{x}{x(2x+1)(1-3x)}$: $x \neq -\dfrac{1}{2}; 0; \dfrac{1}{3}$.

c) $\dfrac{a+3}{a^2-3a}$: jmenovatel neobsahuje součin $\Rightarrow$ zkusíme ho vytvořit.

$\dfrac{a+3}{a^2-3a} = \dfrac{a+3}{a(a-3)}$: $a \neq 0; 3$.

d) $\dfrac{x+2}{x^2-1} = \dfrac{x+2}{(x-1)(x+1)}$: $x \neq \pm 1$.

Př. 6: Rozhodni, zda výraz $\dfrac{a+b}{a(a-b)}$ je definován pro následující dvojice čísel:

a) $a=0; b=2$, b) $a=1; b=-1$, c) $a=4; b=4$, d) $a=-3; b=-3$.

Urči podmínky, za kterých je tento výraz definován.

a) $a=0; b=2$

$\dfrac{a+b}{a(a-b)} = \dfrac{0+2}{0(0-2)} = \dfrac{2}{0} \Rightarrow$ pro $a=0; b=2$ není výraz $\dfrac{a+b}{a(a-b)}$ definován.

b) $a=1; b=-1$

$\dfrac{a+b}{a(a-b)} = \dfrac{1+(-1)}{1[1-(-1)]} = \dfrac{0}{2} \Rightarrow$ pro $a=1; b=-1$ je výraz $\dfrac{a+b}{a(a-b)}$ definován.

c) $a=4; b=4$

$\dfrac{a+b}{a(a-b)} = \dfrac{4+4}{4(4-4)} = \dfrac{8}{0} \Rightarrow$ pro $a=4; b=4$ není výraz $\dfrac{a+b}{a(a-b)}$ definován.

d) $a=-3; b=-3$

$\frac{a+b}{a(a-b)}=\frac{-3+(-3)}{(-3)\left[(-3)-(-3)\right]}=\frac{-6}{0}$ $\Rightarrow$ pro $a=-3; b=-3$ není výraz $\frac{a+b}{a(a-b)}$ definován.

Ve jmenovateli výrazu $\frac{a+b}{a(a-b)}$ je součin dvou členů $\Rightarrow$ ani jedna z nich nesmí být rovna nule $\Rightarrow$ $a\neq 0$ a $a-b\neq 0 \Rightarrow a\neq b$.

Výraz $\frac{a+b}{a(a-b)}$ je definován právě když $a\neq 0$ a $a\neq b$.

Př. 7: Definičním oborem výrazu $\frac{x}{x-4}$ jsou všechna reálná čísla různá od 4. Vysvětli (definuj) význam termínu definiční obor lomeného výrazu.

Pro výraz $\frac{x}{x-4}$ platí podmínka $x\neq 4$ $\Rightarrow$ definiční obor výrazu tedy obsahuje všechna čísla, kromě čísla zakázaného podmínkou $\Rightarrow$ definičním oborem výrazu rozumíme množinu všech čísel, která můžeme do výrazu dosadit.

Definičním oborem výrazu rozumíme množinu všech čísel, která můžeme do výrazu dosadit.

Př. 8: Definiční obor proměnné *x* ve výrazu $\frac{x}{x-4}$ můžeme zapsat $D(x)=R-\{4\}$. Zapiš definiční obory všech výrazů z prvního příkladu.

a) $\frac{x}{x+3}, x\neq -3 \Rightarrow D(x)=R-\{-3\}$

b) $\frac{2}{2x-5}$, $x\neq\frac{5}{2} \Rightarrow D(x)=R-\left\{\frac{2}{5}\right\}$

c) $\frac{2x+1}{x(y-2)}$, $x\neq 0$, $y\neq 2 \Rightarrow D(x)=R-\{0\}$

d) $\frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow D(x)=R$.

Př. 9: Najdi lomený výraz s proměnnou *x*, jehož definičním oborem je množina $R-\{2\}$ a jehož hodnota je pro $x=4$ je 5. Pokud existuje více možností, snaž se jich zapsat co nejvíce.

Definičním obor: $R-\{2\}$ $\Rightarrow$ musí platit podmínka $x\neq 2$ $\Rightarrow$ jmenovatel musí obsahovat výraz $x-2$.

Pro $x = 4$ je hodnota výrazu $x - 2 = 4 - 2 = 2$, pokud má být hodnota celého lomeného výrazu 5, musí být hodnota jmenovatele pětkrát větší $\Rightarrow$ hledaným výrazem může být zlomek $\frac{10}{x-2}$.
Zlomky i lomené výrazy můžeme libovolně rozšiřovat $\Rightarrow$ správným řešení budou i další výrazy: $\frac{20}{2x-4}$, $\frac{30}{3x-6}$, ...

Dodatek: Výsledky z předchozího příkladu je možné zapsat pomocí parametru k takto: $\frac{10k}{k(x-2)}$, kde k je libovolné nenulové číslo. Najít můžeme i další řešení, která mají v čitateli neznámou x: $\frac{5x}{2(x-2)}$ a její varianty vzniklé rozšiřováním číslem nenulovým číslem k: $\frac{5kx}{2k(x-2)}$.

Shrnutí: Definiční obor lomeného výrazu tvoří všechna čísla, která do něj můžeme dosadit.