

3.8.2 Definiční obor I

Předpoklady: 030801

Př. 1: Vypočti. Výsledky uveď také jako složené číslo.

a) $\frac{2}{3} + \frac{3}{5}$

b) $\frac{5}{6} : \frac{15}{24}$

c) $2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)$

d) $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{12}{25}}$

a) $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{10+9}{15} = \frac{19}{15} = 1 \frac{4}{15}$

b) $\frac{5}{6} : \frac{15}{24} = \frac{5}{6} \cdot \frac{24}{15} = \frac{5}{6} \cdot \frac{6 \cdot 4}{5 \cdot 3} = \frac{4}{3} = 1 \frac{1}{3}$

c) $2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = 2 - 4 \cdot \left(\frac{4}{3 \cdot 4} - \frac{3}{4 \cdot 3} \right) = 2 - 4 \cdot \frac{1}{12} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = 1 \frac{2}{3}$

d) $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{12}{25}} = \frac{4 \cdot 25}{5 \cdot 12} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{5}{3} = 1 \frac{2}{3}$

Př. 2: Je dán lomený výraz $\frac{a-2}{a^2-a}$.

a) Urči jeho čitatel a jmenovatel.

b) Zapiš ho bez zlomkové čáry.

c) Urči jeho hodnotu pro $a \in \{-2; 0; 2; 10\}$.

a) $\frac{a-2}{a^2-a}$:

- čitatel (výraz nad zlomkovou čarou, udává počet dílů): $a-2$,
- jmenovatel (výraz pod zlomkovou čarou, udává velikost dílů): a^2-a .

b) $\frac{a-2}{a^2-a} = (a-2) : (a^2-a)$

c) hodnoty:

- $a = -2$: $\frac{a-2}{a^2-a} = \frac{-2-2}{(-2)^2 - (-2)} = \frac{-4}{4+2} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$,
- $a = 0$: $\frac{a-2}{a^2-a} = \frac{0-2}{(0)^2 - (0)} = \frac{-2}{0}$ - nedává smysl, nejde dělit nulou,

- $a = 2: \frac{a-2}{a^2-a} = \frac{2-2}{2^2-2} = \frac{0}{6} = 0,$
- $a = 10: \frac{a-2}{a^2-a} = \frac{10-2}{10^2-10} = \frac{8}{90} = \frac{4}{45}.$

Co se stalo, když jsme se pokusili do výrazu $\frac{a-2}{a^2-a}$ dosadit $a = 0$? Ve jmenovateli se objevila 0, ale to se nesmí stát, protože nulou nelze dělit.

Říkáme:

- výraz $\frac{a-2}{a^2-a}$ **není pro $a = 0$ definován (nemá pro $a = 0$ smysl),**
- výraz $\frac{a-2}{a^2-a}$ **je definován pro $a = 2$ (má pro $a = 2$ smysl).**

Př. 3: Existují ještě další reálná čísla, pro která nemá výraz $\frac{a-2}{a^2-a}$ smysl?

Dalším takovým číslem je číslo 1, protože po jeho dosazení bychom ve jmenovateli také dostali 0.

$$\frac{a-2}{a^2-a} = \frac{1-2}{1^2-1} = \frac{-1}{0}$$

Skutečnost, že výraz $\frac{a-2}{a^2-a}$ je definován pro všechna reálná čísla kromě čísel 0 a 1

zapisujeme pomocí podmínek $\frac{a-2}{a^2-a}$ ($a \neq 0; a \neq 1$), případně $\frac{a-2}{a^2-a}$ ($a \neq 0; 1$).

Př. 4: Zapiš podmínky, za kterých jsou definovány následující lomené výrazy.

a) $\frac{2}{x+3}$ b) $\frac{x}{x+1}$ c) $\frac{x-2}{3}$ d) $\frac{2}{3x+2}$ e) $\frac{x+y}{(x-1) \cdot (y+2)}$

a) $\frac{2}{x+3}: x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3.$

b) $\frac{x}{x+1}: x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1.$

c) $\frac{x-2}{3}: \text{žádná podmínka, jmenovatel neobsahuje proměnnou.}$

d) $\frac{2}{3x+2}: 3x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{2}{3}.$

e) $\frac{x+y}{(x-1)\cdot(y+2)}$: ve jmenovateli je součin dvou závorek (dvou čísel), pokud je jedna z nich rovna nule, nezáleží na tom, jaké číslo vyjde v druhé závorce \Rightarrow ani jedna ze závorek se nesmí rovnat nule, každou závorku řešíme zvlášť:

- $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$,
- $y+2 \neq 0 \Rightarrow y \neq -2$.

Př. 5: Zapiš podmínky, za kterých jsou definovány následující lomené výrazy.

a) $\frac{2x}{x(x-2)}$ b) $\frac{x}{x(2x+1)(1-3x)}$ c) $\frac{a+3}{a^2-3a}$ d) $\frac{x+2}{x^2-2x-3}$ e) $\frac{3}{x^2+1}$

Kterou nedávno probranou látku na řešení příkladu potřebujeme?

Podobné poslednímu bodu v předchozím příkladu \Rightarrow pokud jsou závorky v součinu, hledáme podmínky pro každou zvlášť.

a) $\frac{2x}{x(x-2)}$: součin dvou závorek, ani jedna se nesmí rovnat nule:

- $x \neq 0$,
- $x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$.

$\Rightarrow x \neq 0; 2$.

b) $\frac{x}{x(2x+1)(1-3x)}$: součin dvou závorek, ani jedna se nesmí rovnat nule:

- $x \neq 0$,
- $2x+1 \neq 0 \Rightarrow 2x \neq -1 \Rightarrow x \neq -\frac{1}{2}$,
- $1-3x \neq 0 \Rightarrow 1 \neq 3x \Rightarrow x \neq \frac{1}{3}$,

$\Rightarrow x \neq -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{3}$.

c) $\frac{a+3}{a^2-3a}$: jmenovatel neobsahuje součin \Rightarrow zkusíme ho vytvořit.

$$\frac{a+3}{a^2-3a} = \frac{a+3}{a(a-3)}: a \neq 0; 3.$$

d) $\frac{x+2}{x^2-2x-3}$: $x \neq \pm 1$

e) $\frac{3}{x^2+1}$

Př. 6: Rozhodni, zda výraz $\frac{a+b}{a(a-b)}$ je definován pro následující dvojice čísel:

a) $a = 0; b = 2$, b) $a = 1; b = -1$, c) $a = 4; b = 4$, d) $a = -3; b = -3$.

Urči podmínky, za kterých je tento výraz definován.

a) $a = 0; b = 2$

$$\frac{a+b}{a(a-b)} = \frac{0+2}{0(0-2)} = \frac{2}{0} \Rightarrow \text{pro } a = 0; b = 2 \text{ není výraz } \frac{a+b}{a(a-b)} \text{ definován.}$$

b) $a = 1; b = -1$

$$\frac{a+b}{a(a-b)} = \frac{1+(-1)}{1[1-(-1)]} = \frac{0}{2} \Rightarrow \text{pro } a = 1; b = -1 \text{ je výraz } \frac{a+b}{a(a-b)} \text{ definován.}$$

c) $a = 4; b = 4$

$$\frac{a+b}{a(a-b)} = \frac{4+4}{4(4-4)} = \frac{8}{0} \Rightarrow \text{pro } a = 4; b = 4 \text{ není výraz } \frac{a+b}{a(a-b)} \text{ definován.}$$

d) $a = -3; b = -3$

$$\frac{a+b}{a(a-b)} = \frac{-3+(-3)}{(-3)[(-3)-(-3)]} = \frac{-6}{0} \Rightarrow \text{pro } a = -3; b = -3 \text{ není výraz } \frac{a+b}{a(a-b)} \text{ definován.}$$

Ve jmenovateli výrazu $\frac{a+b}{a(a-b)}$ je součin dvou členů \Rightarrow ani jeden z nich nesmí být roven

nule $\Rightarrow a \neq 0$ a $a-b \neq 0 \Rightarrow a \neq b$.

Výraz $\frac{a+b}{a(a-b)}$ je definován právě když $a \neq 0$ a $a \neq b$.

Př. 7: Definičním oborem výrazu $\frac{x}{x-4}$ jsou všechna reálná čísla různá od 4. Vysvětli

(definuj) význam termínu definiční obor lomeného výrazu.

Pro výraz $\frac{x}{x-4}$ platí podmínka $x \neq 4 \Rightarrow$ definiční obor výrazu tedy obsahuje všechna čísla,

kromě čísla zakázaného podmínkou \Rightarrow definičním oborem výrazu rozumíme množinu všech čísel, která můžeme do výrazu dosadit.

Definičním oborem výrazu rozumíme množinu všech čísel, která můžeme do výrazu dosadit.

Př. 8: Definiční obor proměnné x ve výrazu $\frac{x}{x-4}$ můžeme zapsat $D(x) = R - \{4\}$. Zapiš definiční obory všech výrazů z příkladu 4.

a) $\frac{x}{x+3}, x \neq -3 \Rightarrow D(x) = R - \{-3\}$

b) $\frac{2}{2x-5}, x \neq \frac{5}{2} \Rightarrow D(x) = R - \left\{\frac{5}{2}\right\}$

c) $\frac{2x+1}{x(y-2)}, x \neq 0, y \neq 2 \Rightarrow D(x) = R - \{0\}$

d) $\frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow D(x) = R.$

Př. 9: Najdi lomený výraz s proměnnou x , jehož definičním oborem je množina $R - \{2\}$ a jehož hodnota pro $x = 4$ je 5. Pokud existuje více možností, snaž se jich zapsat co nejvíce.

Definičním obor: $R - \{2\} \Rightarrow$ musí platit podmínka $x \neq 2 \Rightarrow$ jmenovatel musí obsahovat výraz $x - 2$.

Pro $x = 4$ je hodnota výrazu $x - 2 = 4 - 2 = 2$, pokud má být hodnota celého lomeného výrazu 5, musí být hodnota jmenovatele pětkrát větší \Rightarrow hledaným výrazem může být zlomek $\frac{10}{x-2}$.

Zlomky i lomené výrazy můžeme libovolně rozšiřovat \Rightarrow správným řešením budou i další

výrazy: $\frac{20}{2x-4}, \frac{30}{3x-6}, \dots$

Dodatek: Výsledky z předchozího příkladu je možné zapsat pomocí parametru k takto:

$\frac{10k}{k(x-2)}$, kde k je libovolné nenulové číslo. Najít můžeme i další řešení, která

mají v čitateli neznámou x : $\frac{5x}{2(x-2)}$ a její varianty vzniklé rozšiřováním

nenulovým číslem k : $\frac{5kx}{2k(x-2)}$.

Shrnutí: Definiční obor lomeného výrazu tvoří všechna čísla, která do něj můžeme dosadit.