

3.5.4 Krácení lomených výrazů I

Př. 1: Zkrat' zlomky.

a) $\frac{12}{15}$ b) $\frac{24}{36}$ c) $\frac{21}{35}$ d) $\frac{48}{42}$ e) $\frac{64}{120}$ f) $\frac{128}{244}$

a) $\frac{12}{15} = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{4}{5}$ b) $\frac{24}{36} = \frac{4 \cdot 6}{6 \cdot 6} = \frac{4}{6}$ c) $\frac{21}{35} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{3}{5}$

d) $\frac{48}{42} = \frac{8 \cdot 6}{7 \cdot 6} = \frac{8}{7} = 1\frac{1}{7}$ e) $\frac{64}{120} = \frac{8 \cdot 8}{4 \cdot 30} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 8}{4 \cdot 2 \cdot 15} = \frac{8}{15}$

f) $\frac{128}{244} = \frac{4 \cdot 32}{4 \cdot 61} = \frac{32}{61}$

Př. 2: Jsou lomené výrazy $\frac{2}{k+1}$ a $\frac{2k}{k^2+k}$ shodné? Proč?

Zkusíme dosazovat:

• $k = 1$

○ $\frac{2}{k+1} = \frac{2}{1+1} = 1,$

○ $\frac{2k}{k^2+k} = \frac{2 \cdot 1}{1^2+1} = \frac{2}{2} = 1.$

• $k = 10$

○ $\frac{2}{k+1} = \frac{2}{10+1} = \frac{2}{11},$

○ $\frac{2k}{k^2+k} = \frac{2 \cdot 10}{100+10} = \frac{20}{110} = \frac{2}{11}.$

• $k = -2$

○ $\frac{2}{k+1} = \frac{2}{-2+1} = \frac{2}{-1} = -2,$

○ $\frac{2k}{k^2+k} = \frac{2 \cdot (-2)}{(-2)^2+(-2)} = \frac{-4}{4-2} = \frac{-4}{2} = -2.$

• $k = 0$

○ $\frac{2}{k+1} = \frac{2}{0+1} = 2,$

○ $\frac{2k}{k^2+k} = \frac{2 \cdot 0}{0^2+0} = \frac{0}{0}$ - nemá smysl.

Kromě nuly nám po dosazení vyjdou vždy stejné hodnoty \Rightarrow jeden výraz zřejmě musí jít převést na druhý (druhý výraz je prvnímu velmi podobný, jen je všechno vynásobeno neznámou k).

$\frac{2k}{k^2+k} = \frac{k \cdot 2}{k(k+1)} = \frac{2}{k+1}$ - provedli jsme krácení neznámé k jako u normálních zlomků.

Proč to nefunguje u nuly?

Lomený výraz $\frac{2}{k+1}$ má jedinou podmínku $k \neq -1$.

Lomený výraz $\frac{2k}{k^2+k}$ má podmínky dvě $k \neq -1$ a $k \neq 0$.

Výrazy $\frac{2}{k+1}$ a $\frac{2k}{k^2+k}$ nejsou shodné, přestože druhý výraz můžeme krácením převést na výraz první, protože nemají stejný definiční obor.

Pedagogická poznámka: K tomu, že výrazy jsou stejné dojdou všichni (většina dosazováním), někteří si všimnou i toho, do nezkráceného výrazu nejde dosadit nula. Jen část žáků pochopí úpravu jako krácení, většina jen vidí, že ve zkráceném výrazu chybí nahoře i dole k . Pro ně stojí za to ukázat úpravu i při dosazení konkrétního čísla za k (stačí).

Podobně jako můžeme krácením zjednodušovat zlomky $\frac{12}{15} = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{4}{5}$,
můžeme krácením zjednodušovat i lomené výrazy $\frac{2k}{k^2+k} = \frac{k \cdot 2}{k(k+1)} = \frac{2}{k+1}$.

Výchozí výraz však není shodný s konečným, pokud nemají stejné definiční obory.

Krácení lomeného výrazu můžeme provést pouze v případě, že výraz dokážeme upravit na tvar $\frac{(\text{krácený výraz}) \cdot (\text{libovolný výraz 1})}{(\text{krácený výraz}) \cdot (\text{libovolný výraz 2})} = \frac{(\text{libovolný výraz 1})}{(\text{libovolný výraz 2})}$.

Př. 3: Zkrať lomené výrazy.

a) $\frac{15a}{20b^2}$

b) $\frac{x^2y}{xy^2}$

c) $\frac{x+1}{3x+3}$

d) $\frac{x-1}{x^2-1}$

a) $\frac{15a}{20b^2} = \frac{5 \cdot 3a}{5 \cdot 4b^2} = \frac{3a}{4b^2}$, $b \neq 0$

b) $\frac{x^2y}{xy^2} = \frac{xy \cdot x}{xy \cdot y} = \frac{x}{y}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$

c) $\frac{x+1}{3x+3} = \frac{x+1}{3(x+1)} = \frac{1}{3}$, $x \neq -1$

d) $\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1 \cdot (x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x+1}$, $x \neq \pm 1$

Pedagogická poznámka: První dva body jsou bez problémů. Naopak druhé dva jsou správně

jen výjimečně. Nejčastější chybou v bodu c) je $\frac{x+1}{3x+3} = \frac{\cancel{x}+1}{\cancel{x}+2x+3} = \frac{1}{2x+3}$

("krácení" ze součtu), v bodu d) pak $\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{x \cdot x-1} = \frac{-1}{x-1}$ ("krácení" z

polovičního součtu). V bodu c) říkám žákům, že správný výsledek je zřejmý z toho, když porovnájí číselník a jmenovatel (jmenovatel je třikrát menší proto musí

být hodnota zlomku $\frac{1}{3}$), že je jejich řešení špatné si ukazujeme dosazením čísla za

proměnnou ($\frac{x+1}{3x+3} = \frac{x+1}{x+2x+3} = \frac{10+1}{10+2 \cdot 10+3}$), kde by číslo 10 nikdo nekrátil.
Podobně postupujeme i u bodu d).

Př. 4: Zkrat' lomené výrazy.

a) $\frac{a^3b^2c}{a^2b^3c^2}$ b) $\frac{15xy}{25x^2}$ c) $\frac{3a^2}{9a^3b}$ d) $\frac{28x^7y^3}{42x^5y^6}$ e) $\frac{a^2b^3c}{(abc)^2}$

a) $\frac{a^3b^2c}{a^2b^3c^2} = \frac{a}{bc}$ (podrobněji: $\frac{a^3b^2c}{a^2b^3c^2} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot \cancel{b} \cdot \cancel{b} \cdot \cancel{c}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{b} \cdot \cancel{b} \cdot b \cdot \cancel{c} \cdot c} = \frac{a}{bc}$)
 $a \neq 0; b \neq 0; c \neq 0$

b) $\frac{15xy}{25x^2} = \frac{5 \cdot 3xy}{5 \cdot 5x^2} = \frac{3y}{5x}$ (podrobněji: $\frac{15xy}{25x^2} = \frac{\cancel{5} \cdot 3 \cdot \cancel{x} \cdot y}{\cancel{5} \cdot 5 \cdot \cancel{x} \cdot x} = \frac{3y}{5x}$)
 $x \neq 0$

c) $\frac{3a^2}{9a^3b} = \frac{3a^2}{3 \cdot 3a^3b} = \frac{1}{3ab}$ d) $\frac{28x^7y^3}{42x^5y^6} = \frac{7 \cdot 4 \cdot x^2}{7 \cdot 6 \cdot y^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot x^2}{2 \cdot 3 \cdot y^3} = \frac{2x^2}{3y^3}$
 $a \neq 0; b \neq 0$

e) $\frac{a^2b^3c}{(abc)^2} = \frac{a^2b^3c}{a^2b^2c^2} = \frac{b}{c}$
 $a \neq 0; b \neq 0; c \neq 0$

Pedagogická poznámka: V učebnici jsou první dva příklady rozepsány, u žáků se snažím, aby rozepisování neprováděli (pouze v případech, kdy si nejsou jisti).

Př. 5: Najdi lomený výraz, ve kterém můžeme vykrátit mnohočlen s proměnnou a přesto získáme shodný lomený výraz.

Příklad 2: $\frac{2k}{k^2+k} = \frac{k \cdot 2}{k(k+1)} = \frac{2}{k+1}$ - u nezkráceného výrazu byla navíc podmínka $k \neq 0$,

která u vykráceného výrazu není \Rightarrow musíme krátit výraz, který se nikdy nerovná nule (z něho nebude vyplývat žádná podmínka).

Možný výraz na krácení: x^2+1 (místo 1 můžeme napsat libovolné kladné číslo).

Zkrácený výraz pak může být zcela libovolný.

Hledaný výraz je například: $\frac{2x^2+2}{x^3+x} = \frac{2(x^2+1)}{x(x^2+1)} = \frac{2}{x}$, podmínka $x \neq 0$.

Dodatek: Více podobných výrazů bychom mohli zapsat pomocí parametru (další proměnné)

například takto: $\frac{2x^2+2k}{x^3+xk} = \frac{2(x^2+k)}{x(x^2+k)} = \frac{2}{x}$, $k > 0$.

Shrnutí: Pokud je čítec i jmenovatel lomeného výrazu vynásobený stejným výrazem, můžeme tento výraz zkrátit (krátí se jen přes násobení).