3.5.5 Krácení lomených výrazů II

Pedagogická poznámka: Nejdůležitější částí hodiny je společná kontrola příkladu 2. Nečekáme až budou mít žáci hotový celý příklad, kontrolujeme většinou brzy poté, co všichni udělají první dva body, abychom si ihned ukázali častou chybu v bodu a) a zvětšili tak šanci na úspěšné řešení dalších bodů.

Př. 1: Zapiš podmínky a zkrať lomené výrazy.

a) $\frac{27x^3}{36y^2}$ b) $\frac{22ab^2}{33a^2b}$ c) $\frac{6xy^3}{(3xy)^2}$ d) $\frac{2x-1}{3(2x-1)}$

a) $\frac{27x^3}{36y^2}=\frac{9\cdot 3x^3}{9\cdot 4y^2}=\frac{3x^3}{4y^2}$ $\quad y\neq 0$

b) $\frac{22ab^2}{33a^2b}=\frac{2\cdot 11\cdot a\cdot b\cdot b}{3\cdot 11\cdot a\cdot a\cdot b}=\frac{2b}{3a}$ $\quad a\neq 0; b\neq 0$

c) $\frac{6xy^3}{(3xy)^2}=\frac{3\cdot 2xy^3}{3^2x^2y^2}=\frac{2y}{3x}$ $\quad x\neq 0; y\neq 0$

d) $\frac{2x-1}{3(2x-1)}=\frac{1\cdot(2x-1)}{3(2x-1)}=\frac{1}{3}$ $\quad 2x-1\neq 0 \;\Rightarrow\; x\neq\frac{1}{2}$

Př. 2: Pokud je možné lomené výrazy zkrátit, tak je zkrať. Pokud zkrácení možné není, vysvětli proč.

a) $\frac{2x}{x+1}$ b) $\frac{a(b+1)}{b(b+1)}$ c) $\frac{(x+y)+y}{x(x+y)}$ d) $\frac{a(a+b)}{a+b}$

e) $\frac{a(a+b)}{a^2(a-b)+b}$ f) $\frac{(a-b)^2}{a^2-ab}$ g) $\frac{2(x^2+1)-2}{x(x^2+1)\cdot 2}$

a) $\frac{2x}{x+1}$

Není možné krátit, ve jmenovateli není součin a není možné jej napsat jako $x\cdot(\;\;)$ nebo $2\cdot(\;\;)$.

b) $\frac{a(b+1)}{b(b+1)}=\frac{a}{b}$

Čitatel i jmenovatel je zapsán ve tvaru $(\;\;)(b+1)$.

c) $\frac{(x+y)+y}{x(x+y)}$

Není možné krátit, čitatel neobsahuje součin, ale součet. Čitatel není na rozdíl od jmenovatele zapsán jako $(x+y)(\;\;)$.

d) $\frac{a(a+b)}{a+b}=\frac{a}{1}=a$

e) $\frac{a(a+b)}{a^2(a-b)+b}$

Není možné krátit, ve jmenovateli je součet členů $a^2(a-b)$ a b, jmenovatel nejde zapsat ve tvaru $a\cdot(\;\;)$.

f) $\frac{(a-b)^2}{a^2-ab}=\frac{(a-b)(a-b)}{a(a-b)}=\frac{a-b}{a}$

g) $\frac{2(x^2+1)-2}{x(x^2+1)\cdot 2}$

V tomto tvaru není možné krátit, čitatel není zapsán ve tvaru $(x^2+1)(\;\;)$.

Po úpravách: $\frac{2(x^2+1)-2}{x(x^2+1)\cdot 2}=\frac{2\left[(x^2+1)-1\right]}{x(x^2+1)\cdot 2}=\frac{2x^2}{x(x^2+1)\cdot 2}=\frac{x}{x^2+1}$.

Pedagogická poznámka: Častou chybou v bodu a) je jednoduché "vyškrtání x" $\frac{2x}{x+1}=\frac{2}{1}$, často se objevuje i poněkud složitější "postup" $\frac{2x}{x+1}=\frac{\cancel{x}+x}{\cancel{x}+1}=\frac{x}{1}=x$, ve kterém se žáci snaží vyrobit "součin ve sčítání. Kromě toho, že si zdůrazňujeme neexistenci součinu, nechávám žáky, aby si ověřili své výsledky i dosazením.

Z předchozího příkladu je zřejmé, že pokud budeme chtít krátit, budeme muset v čitateli i jmenovateli rozložit mnohočleny na součin.

Př. 3: Zkrať lomené výrazy a zapiš podmínky.

a) $\frac{a(b-c)}{b^2-bc}$ b) $\frac{x+2}{x^2+2x}$ c) $\frac{a+b}{a^2-b^2}$ d) $\frac{4x^2-9y^2}{2x+3y}$

a) $\frac{a(b-c)}{b^2-bc}=\frac{a(b-c)}{b(b-c)}=\frac{a}{b}$ $\quad b\neq 0,\ b\neq c$

b) $\frac{x+2}{x^2+2x}=\frac{x+2}{x(x+2)}=\frac{1}{x}$ $\quad x\neq -2;0$

c) $\frac{a+b}{a^2-b^2}=\frac{a+b}{(a-b)(a+b)}=\frac{1}{a-b}$ $\quad a \neq \pm b$

d) $\frac{4x^2-9y^2}{2x+3y}=\frac{(2x-3y)(2x+3y)}{2x+3y}=2x-3y$ $\quad 2x+3y \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{3}{2}y$

Př. 4: Zkrať lomené výrazy. Zapiš podmínky.

a) $\frac{bc+c^2}{b^2+bc}$ b) $\frac{4x+2}{2x^2+x}$ c) $\frac{a^2+2ab+b^2}{2a^2-2b^2}$ d) $\frac{x^2-x-12}{x^2-4x}$

a) $\frac{bc+c^2}{b^2+bc}=\frac{c(b+c)}{b(b+c)}=\frac{c}{b}$ $\quad b \neq 0; b \neq -c$

b) $\frac{4x+2}{2x^2+x}=\frac{2(2x+1)}{x(2x+1)}=\frac{2}{x}$ $\quad x \neq 0; -\frac{1}{2}$

c) $\frac{a^2+2ab+b^2}{2a^2-2b^2}=\frac{(a+b)^2}{2(a^2-b^2)}=\frac{(a+b)^2}{2(a-b)(a+b)}=\frac{a+b}{2(a-b)}$ $\quad a \neq \pm b$

d) $\frac{x^2-x-12}{x^2-4x}=\frac{(x-4)(x+3)}{x(x-4)}=\frac{x+3}{x}$ $\quad x \neq 0; 4$

Shrnutí: Krácení je z poloviny rozkládáním mnohočlenů na součiny.