

3.8.7 Rozšiřování lomených výrazů

Předpoklady: 030801

Př. 1: Urči: a) $n(9; 7)$ b) $n(9; 12)$ c) $n(24; 20)$

Sestav postup na hledání $n(a; b)$.

a) $n(9; 7) = 9 \cdot 7 = 63$ (čísla jsou nesoudělná)

b) $n(9; 12)$

- $9 = 3 \cdot 3$
- $12 = 4 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

$n(9; 12) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$

c) $n(24; 20)$

- $24 = 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
- $20 = 4 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5$

$n(20; 24) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 120$

Nejmenší společný násobek najdeme ve dvou krocích:

- najdeme prvočíselný rozklad,
- rozklad společného násobku sestavíme tak, aby v něm byly „obsaženy rozklady všech čísel“ (rozklad sestavíme z nejvyšších mocnin všech prvočísel, které se vyskytnou v libovolném z rozkladů).

Př. 2: Najdi nejmenší společný násobek mnohočlenů.

a) $6x^3y^2; 4xy^2z$ b) $(x+1)^2; x^2-1$ c) $a^2-9; a^2+5a+6$

a) $6x^3y^2; 4xy^2z$

Rozklady:

- $6x^3y^2 = 2 \cdot 3x^3y^2$
- $4xy^2z = 2 \cdot 2xy^2z$

Nejmenší společný násobek (obsahuje oba jednočleny): $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^3y^2z = 12x^3y^2z$

b) $(x+1)^2; x^2-1$

Rozklady:

- $(x+1)^2 = (x+1) \cdot (x+1)$
- $x^2-1 = (x+1)(x-1)$

Nejmenší společný násobek (obsahuje oba mnohočleny): $(x+1)(x+1)(x-1)$.

c) $a^2-9; a^2+5a+6$

Rozklady:

- $a^2 - 9 = (a - 3)(a + 3)$
- $a^2 + 5a + 6 = (a + 3)(a + 2)$

Nejmenší společný násobek (obsahuje oba jednočleny): $(a - 3)(a + 3)(a + 2)$

Pedagogická poznámka: Bod a) je bez problémů, zato zbytek příkladu jde velice těžce. Žáci příliš nevidí, že tvar $x^2 - 1$ neodpovídá prvočíselnému rozkladu, kde je násobení (zatímco zde je pouze sčítání), a proto se musí upravit na součin. Ukazují žákům, že zápis šestky $6 = 4 + 2$ by jim při hledání společného násobku (narozdíl od rozkladu $6 = 2 \cdot 3$) příliš nepomohl.

Př. 3: Rozšiř lomené výrazy mnohočlenem v závorce. Závorky neroznásobuj.

a) $\frac{1}{x+1} \quad \{x\}$ b) $\frac{2x+1}{x} \quad \{x+1\}$ c) $\frac{x+1}{x-1} \quad \{x-1\}$

Rozšiřování normálních zlomků: $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$.

a) $\frac{1}{x+1} = \frac{x}{(x+1) \cdot x}$

b) $\frac{2x+1}{x} = \frac{(2x+1)(x+1)}{x(x+1)}$

c) $\frac{x+1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-1)}$

Př. 4: Rozšiř lomené výrazy tak, aby měly stejného, co nejjednoduššího jmenovatele. Výsledky neroznásobuj.

a) $\frac{1}{2x}; \frac{a}{b^2}$ b) $\frac{3x}{y}; \frac{x^2}{y^2}$ c) $\frac{x}{x+1}; \frac{x+1}{x}$ d) $\frac{2a}{a-b}; \frac{2b}{a+b}$

Jmenovatele můžeme měnit tím, že zlomek rozšiřujeme \Rightarrow hledáme společný násobek jmenovatelů.

a) $\frac{1}{2x}; \frac{a}{b^2} \Rightarrow$ společný násobek jmenovatelů $2xb^2 \Rightarrow$

- $\frac{1}{2x} = \frac{b^2}{2xb^2}$,
- $\frac{a}{b^2} = \frac{a \cdot 2x}{b^2 \cdot 2x} = \frac{2ax}{2xb^2}$.

b) $\frac{3x}{y}; \frac{x^2}{y^2} \Rightarrow$ společný násobek jmenovatelů $y^2 \Rightarrow$

- $\frac{3x}{y} = \frac{3xy}{y \cdot y} = \frac{3xy}{y^2}$,

- $\frac{x^2}{y^2}$.

c) $\frac{x}{x+1}; \frac{x+1}{x} \Rightarrow$ společný násobek jmenovatelů $(x+1)x \Rightarrow$

- $\frac{x}{x+1} = \frac{x \cdot x}{(x+1) \cdot x} = \frac{x^2}{x(x+1)}$,
- $\frac{x+1}{x} = \frac{(x+1)(x+1)}{x(x+1)} = \frac{(x+1)^2}{x(x+1)}$.

d) $\frac{2a}{a-b}; \frac{2b}{a+b} \Rightarrow$ společný násobek jmenovatelů $(a-b)(a+b) \Rightarrow$

- $\frac{2a}{a-b} = \frac{2a(a+b)}{(a-b)(a+b)}$,
- $\frac{2b}{a+b} = \frac{2b(a-b)}{(a+b)(a-b)}$.

Př. 5: Rozšiř lomené výrazy tak, aby měly stejného co nejjednoduššího jmenovatele.

a) $\frac{1}{x^2+x}; \frac{2}{x^2}$

b) $\frac{a-1}{a^2+a}; \frac{4}{a^2-a}$

c) $\frac{x}{x^2-9}; \frac{x+1}{x^2+3x}$

d) $\frac{2a}{a^2-4}; \frac{2b}{a^2-3a+2}$

a) $\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)}; \frac{2}{x^2} \Rightarrow$ společný násobek jmenovatelů $x^2(x+1) \Rightarrow$

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1 \cdot x}{x(x+1) \cdot x} = \frac{x}{x^2(x+1)}$$

$$\frac{2}{x^2} = \frac{2(x+1)}{x^2(x+1)}$$

b) $\frac{a-1}{a^2+a} = \frac{a-1}{a(a+1)}; \frac{4}{a^2-a} = \frac{4}{a(a-1)} \Rightarrow$ společný násobek jmenovatelů $a(a+1)(a-1) \Rightarrow$

$$\frac{a-1}{a^2+a} = \frac{(a-1)(a-1)}{a(a+1)(a-1)} = \frac{(a-1)^2}{a(a+1)(a-1)}$$

$$\frac{4}{a^2-a} = \frac{4(a+1)}{a(a-1)(a+1)}$$

c) $\frac{x}{x^2-9} = \frac{x}{(x+3)(x-3)}; \frac{x+1}{x^2+3x} = \frac{x+1}{x(x+3)} \Rightarrow$ společný násobek jmenovatelů

$$x(x+3)(x-3) \Rightarrow$$

$$\frac{x}{x^2-9} = \frac{x \cdot x}{(x+3)(x-3) \cdot x} = \frac{x^2}{x(x+3)(x-3)}$$

$$\frac{x+1}{x^2+3x} = \frac{(x+1)(x-3)}{x(x+3)(x-3)}$$

d) $\frac{2a}{a^2-4} = \frac{2a}{(a-2)(a+2)}$; $\frac{2b}{a^2-3a+2} = \frac{2b}{(a-1)(a-2)} \Rightarrow$ společný násobek jmenovatelů

$$(a-1)(a-2)(a+2) \Rightarrow$$

$$\frac{2a}{a^2-4} = \frac{2a(a-1)}{(a-2)(a+2)(a-1)}$$

$$\frac{2b}{a^2-3a+2} = \frac{2b(a+2)}{(a-1)(a-2)(a+2)}$$

Shrnutí: