

3.5.17 Složené lomené výrazy II

Předpoklady: 030516

Př. 1: Zjednoduš. Zapiš podmínky.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \frac{12a^3b^2}{15ab^3} & \text{b) } \frac{2x-6}{xy-3y} & \text{c) } \frac{a^2b+4b}{3a^3+12a} & \text{d) } \frac{uv-3v}{u^2-2u-15} \\ & & & \frac{u^2+6u+9}{} \end{array}$$

$$\text{a) } \frac{12a^3b^2}{15ab^3} = \frac{4 \cdot 3a^3b^2}{3 \cdot 5ab^3 \cdot 4a^2} = \frac{1}{5b} \quad a; b \neq 0$$

$$\text{b) } \frac{2x-6}{xy-3y} = \frac{2x-6}{x^2+3x} \cdot \frac{7x+21}{xy-3y} = \frac{2(x-3) \cdot 7(x+3)}{x(x+3) \cdot y(x-3)} = \frac{14}{xy} \quad x; y \neq 0, x \neq \pm 3$$

$$\text{c) } \frac{a^2b+4b}{3a^3+12a} = \frac{a^2b+4b}{a^2-4} \cdot \frac{a^2-4a+4}{3a^3+12a} = \frac{b(a^2+4)(a-2)^2}{(a-2)(a+2) \cdot 3a(a^2+4)} = \frac{b(a-2)}{3a(a+2)}$$

$a \neq \pm 2; 0; 2$

$$\text{d) } \frac{uv-3v}{u^2-2u-15} = \frac{(uv-3v)(u^2+6u+9)}{u^2-2u-15} = \frac{v(u-3)(u+3)^2}{(u-5)(u+3)} = \frac{v(u-3)(u+3)}{(u-5)}$$

$u \neq -3; 5$

Př. 2: Matematicky korektně za přísného dohledu podmínek zlikviduj složené zlomky.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} & \text{b) } \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} & \text{c) } \frac{\frac{x}{x-1} - 1}{\frac{x}{x+1} + 1} & \text{d) } \frac{\frac{a+1}{a-1} - \frac{a-1}{a+1}}{\frac{a-1}{a+1} + \frac{a+1}{a-1}} \end{array}$$

$$\text{a) } \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} = \frac{\frac{b}{ab} + \frac{a}{ab}}{\frac{b^2}{a^2b^2} - \frac{a^2}{a^2b^2}} = \frac{\frac{a+b}{ab}}{\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}} = \frac{a^2b^2(a+b)}{ab(a+b)(a-b)} = \frac{ab}{a-b} \quad a \neq \pm b, a; b \neq 0$$

$$\text{b) } \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{(x+1)x}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x-1} \quad x \neq 0; 1$$

$$c) \frac{\frac{x}{x+1} - 1}{\frac{x-1}{x+1} + 1} = \frac{\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + \frac{x-1}{x+1}} = \frac{\frac{x-(x-1)}{x+1}}{\frac{x+x-1}{x+1}} = \frac{1}{2x+1} = \frac{x+1}{(x-1)(2x+1)} \quad x \neq -1; -\frac{1}{2}; 1$$

$$d) \frac{\frac{a+1}{a-1} - \frac{a-1}{a+1}}{\frac{a-1}{a+1} + \frac{a+1}{a-1}} = \frac{\frac{(a+1)(a+1)}{(a-1)(a+1)} - \frac{(a-1)(a-1)}{(a+1)(a-1)}}{\frac{(a-1)(a-1)}{(a+1)(a-1)} + \frac{(a+1)(a+1)}{(a-1)(a+1)}} = \frac{a^2 + 2a + 1 - (a^2 - 2a + 1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{4a}{(a-1)(a+1)} =$$

$$= \frac{4a(a-1)(a+1)}{(2a^2 + 2)(a-1)(a+1)} = \frac{4a}{2a^2 + 2}$$

$$a \neq -1; 1$$

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu je (nejvíce v bodě a)) nutné ohlídat, aby žáci nezjednodušovali složený zlomek dříve, než bude jasné, co je jmenovatel a co čítec u obou zlomků, tzn. než upraví obě části složeného zlomku (sečtou o odečtou výrazy, které tam jsou).

Př. 3: Do zlomku $\frac{A+B}{A-B}$ dosad' a zjednoduř. Zapiř podmínky.

$$a) A = \frac{x-1}{x} \text{ a } B = \frac{x}{x+1}$$

$$b) A = \frac{x+1}{x} \text{ a } B = \frac{x+1}{x+2}$$

a)

$$\frac{A+B}{A-B} = \frac{\frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1}}{\frac{x-1}{x} - \frac{x}{x+1}} = \frac{\frac{(x-1)(x+1)}{x(x+1)} + \frac{x \cdot x}{x(x+1)}}{\frac{(x-1)(x+1)}{x(x+1)} - \frac{x \cdot x}{x(x+1)}} = \frac{\frac{x^2-1+x^2}{x(x+1)}}{\frac{x^2-1-x^2}{x(x+1)}} = \frac{2x^2-1}{-1} = \frac{(2x^2-1)x(x+1)}{-x(x+1)}$$

$$= -(2x-1) = 1-2x^2$$

$$x \neq -1; 0; 1$$

b)

$$\frac{A+B}{A-B} = \frac{\frac{x+1}{x} + \frac{x+1}{x+2}}{\frac{x+1}{x} - \frac{x+1}{x+2}} = \frac{\frac{(x+1)(x+2)}{x(x+2)} + \frac{x(x+1)}{x(x+2)}}{\frac{(x+1)(x+2)}{x(x+2)} - \frac{x(x+1)}{x(x+2)}} = \frac{\frac{x^2+2x+x+2+x^2+x}{x(x+2)}}{\frac{x^2+2x+x+2-x^2-x}{x(x+2)}} = \frac{2x^2+4x+2}{2x+2} =$$

$$= \frac{(2x^2+4x+2)x(x+2)}{x(x+2)(2x+2)} = \frac{2(x^2+2x+1)}{2(x+1)} = \frac{(x+1)^2}{x+1} = x+1$$

$$x \neq -2; -1; 0$$

Př. 4: Zjednoduš lomený výraz $\frac{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}}{x}$.

$$\frac{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}}{x} = \frac{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{x+1}}}{x} = \frac{1 + \frac{1}{1 - \frac{x}{x+1}}}{x} = \frac{1 + \frac{1}{\frac{x+1-x}{x+1}}}{x} = \frac{1 + \frac{1}{\frac{1}{x+1}}}{x} = \frac{1+x+1}{x} = \frac{x+2}{x}$$

$$x \neq -1; 0$$

Shrnutí: Před zjednodušováním, musíme čitatel i jmenovatel upravit, aby neobsahoval součet nebo rozdíl.