

4.2.1 Rovnice s neznámou ve jmenovateli I

Předpoklady: 040103

Pedagogická poznámka: Hodina obsahuje látku na půl vyučovací hodiny, ve zbytku píšeme písemku. Není však příliš složité doplnit příklad 3 (který se většinou nestíhá) o další body a tak ji natáhnout na celých 45 minut.

Z názvu je jasné, o co půjde: neznámá se bude vyskytovat ve jmenovateli lomeného výrazu.

Př. 1: Vyřeš rovnici: $\frac{x}{x-2} = \frac{2}{x-2} + 3$.

$$\frac{x}{x-2} = \frac{2}{x-2} + 3 \quad / (x-2)$$

$$x = 2 + 3(x-2)$$

$$x = 2 + 3x - 6 \quad / -x$$

$$0 = -4 + 2x \quad / +4$$

$$4 = 2x \quad / :2$$

$$x = 2 \Rightarrow K = \{2\}$$

Pedagogická poznámka: Pokud se následující řešení objeví, nechávám konfrontovat žáky mezi sebou (v rámci toho se většinou rozřeší i příklad 2), který v tom případě přeskakujeme.

Rovnici je však možné řešit i takto:

$$\frac{x}{x-2} = \frac{2}{x-2} + 3 \quad / -\frac{2}{x-2}$$

$$\frac{x}{x-2} - \frac{2}{x-2} = 3$$

$$\frac{x-2}{x-2} = 3$$

$$1 = 3 \Rightarrow K = \emptyset$$

Oběma postupy jsme došli k různým výsledkům \Rightarrow minimálně jeden z postupů je špatný.

Př. 2: Číslo 2 není řešením rovnice v předchozím příkladu. Najdi důvod a zkus ze situace vyvodit obecné poučení pro řešení rovnic s neznámou ve jmenovateli.

Číslo 2 nemůžeme do rovnice vůbec dosadit (v jmenovateli by vyšla 0) \Rightarrow první řešení není správné, na konci jsme měli ještě zkontrolovat, zda je možné výsledek dosadit do zadání.

Poučení: Když řešíme rovnice s neznámou ve jmenovateli, musíme na začátku udělat podmínky. Pokud je číslo, které získáme, vyloučeno podmínkou, není řešením rovnice.

Jak se mohla dvojka vetřít do řešení?

Natlačila se tam hned v prvním kroku: $\frac{x}{x-2} = \frac{2}{x-2} + 3 \quad / \cdot (x-2)$.

Pokud násobíme číslem $(x-2)$ a platí $x=2$, násobíme rovnici nulou \Rightarrow rovnice se převede do tvaru $0=0$ a řešením této rovnice je každé číslo, pro které tato úprava platí (tedy právě ona nešťastná dvojka).

Př. 3: Vyřeš rovnice.

a) $2 - \frac{3}{x} = 1 + \frac{2}{x}$ b) $\frac{a-3}{a-2} = 4$ c) $\frac{3x-2}{5x+1} = \frac{3}{5}$ d) $\frac{a}{a+1} + 2 = -\frac{1}{a+1}$

a) $2 - \frac{3}{x} = 1 + \frac{2}{x} \quad / \cdot x \quad x \neq 0$
 $2x - 3 = x + 2 \quad / -x$
 $x - 3 = 2 \quad / +3$
 $x = 5$, není zakázáno podmínkou $\Rightarrow K = \{5\}$

b) $\frac{a-3}{a-2} = 4 \quad / \cdot (a-2) \quad a \neq 2$
 $a - 3 = 4(a - 2)$
 $a - 3 = 4a - 8 \quad / -a$
 $-3 = 3a - 8 \quad / +8$
 $5 = 3a \quad / :3$
 $a = \frac{5}{3}$, není zakázáno podmínkou \Rightarrow

$$K = \left\{ \frac{5}{3} \right\}$$

c) $\frac{3x-2}{5x+1} = \frac{3}{5} \quad / \cdot 5(5x+1) \quad x \neq -\frac{1}{5}$
 $5(3x-2) = 3(5x+1)$
 $15x - 10 = 15x + 3 \quad / -15x$
 $-10 = 3 \Rightarrow K = \emptyset$

d) $\frac{a}{a+1} + 2 = -\frac{1}{a+1} \quad / \cdot (a+1) \quad a \neq -1$
 $a + 2(a+1) = -1$
 $a + 2a + 2 = -1 \quad / -2$
 $3a = -3 \quad / :3$
 $a = -1$, zakázáno podmínkou $\Rightarrow K = \emptyset$

Shrnutí: Při řešení rovnic s neznámou ve jmenovateli nemůžeme za řešení považovat čísla, která jsou zakázána podmínkou.