

## 4.2.2 Rovnice s neznámou ve jmenovateli II

**Předpoklady:** 040201

**Př. 1:** Vyřeš rovnice s neznámou ve jmenovateli.

$$\text{a) } \frac{3a-2}{2a+1} = \frac{3}{2} \quad \text{b) } 5 - \frac{3}{x} = \frac{7}{2x} - \frac{2}{3} \quad \text{c) } \frac{x-1}{x+2} = \frac{3x-2}{x+2} \quad \text{d) } \frac{2}{x-3} + 1 = \frac{x-1}{x-3}$$

$$\text{a) } \frac{3a-2}{2a+1} = \frac{3}{2} \quad / \cdot 2(2a+1) \quad a \neq -\frac{1}{2} \quad \text{b) } 5 - \frac{3}{x} = \frac{7}{2x} - \frac{2}{3} \quad / \cdot 6x \quad x \neq 0$$

$$2(3a-2) = 3(2a+1)$$

$$6a-4 = 6a+3 \quad / -6a$$

$$-4 = 3 \Rightarrow K = \emptyset$$

$$30x-18 = 21-4x \quad / +4x$$

$$34x-18 = 21 \quad / +18$$

$$34x = 39 \quad / :34$$

$$x = \frac{39}{34}, \text{ není v rozporu s podmínkou } \Rightarrow$$

$$K = \left\{ \frac{39}{34} \right\}$$

$$\text{c) } \frac{x-1}{x+2} = \frac{3x-2}{x+2} \quad / \cdot x+2 \quad x \neq -2$$

$$x-1 = 3x-2 \quad / -x$$

$$-1 = 2x-2 \quad / +2$$

$$2x = 1 \quad / :2$$

$$x = \frac{1}{2}, \text{ není v rozporu s podmínkou } \Rightarrow$$

$$K = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$\text{d) } \frac{2}{x-3} + 1 = \frac{x-1}{x-3} \quad / (x-3) \quad x \neq 3$$

$$2 + x - 3 = x - 1 \quad / -x$$

$$-1 = -1 \Rightarrow \text{zdá se, že množinou řešení jsou všechna reálná čísla, ale musíme ještě dodržet podmínku a vyřadit číslo 3 } \Rightarrow K = R - \{3\}$$

**Př. 2:** Vyřeš rovnice.

$$\text{a) } \frac{2x}{x-1} + 1 = \frac{3x}{x-3} \quad \text{b) } \frac{a}{a-2} - \frac{a+1}{2-a} = 0$$

$$\text{a) } \frac{2x}{x-1} + 1 = \frac{3x}{x-3} + 1 \quad / \cdot (x-1)(x-3) \quad x \neq 1; 3$$

$$2x(x-3) + (x-1)(x-3) = 3x(x-1)$$

$$2x^2 - 6x + x^2 - 3x - x + 3 = 3x^2 - 3x$$

$$3x^2 - 10x + 3 = 3x^2 - 3x \quad / -3x^2 + 3x$$

$$-7x + 3 = 0 \quad / +7x$$

$$3 = 7x \quad / :7$$

$$x = \frac{3}{7} \quad K = \left\{ \frac{3}{7} \right\}$$

$$\text{b) } \frac{a}{a-2} - \frac{a+1}{2-a} = 0 \quad a \neq 2$$

$$\frac{a}{a-2} - \frac{a+1}{-(a-2)} = 0$$

$$\frac{a}{a-2} + \frac{a+1}{a-2} = 0 \quad | \cdot a-2$$

$$a+a+1=0 \quad | -1$$

$$2a = -1 \quad | :2$$

$$a = -\frac{1}{2} \quad K = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

**Př. 3:** Vyřeš rovnice.

$$\text{a) } \frac{3}{x} - \frac{4}{x+1} = \frac{4}{x^2+x}$$

$$\text{c) } \frac{a}{a+1} = \frac{a+1}{a-1} + \frac{a+3}{a^2-1}$$

$$\text{b) } \frac{3y}{2y+1} - \frac{y+1}{3y} = \frac{7y^2}{6y^2+3y}$$

$$\text{d) } \frac{2x}{x+2} - \frac{x}{x+4} = \frac{x^2+4x-3}{x^2+6x+8}$$

$$\text{a) } \frac{3}{x} - \frac{4}{x+1} = \frac{4}{x^2+x}$$

Platí:  $x^2+x = x(x+1) \Rightarrow x \neq -1; 0$ .

$$\frac{3}{x} - \frac{4}{x+1} = \frac{4}{x^2+x} \quad | \cdot x(x+1)$$

$$3(x+1) - 4x = 4$$

$$3x+3-4x = 4$$

$$3-x = 4 \quad | +x-4$$

$-1 = x$ , vyloučeno podmínkou  $\Rightarrow K = \emptyset$

$$\text{b) } \frac{3y}{2y+1} - \frac{y+1}{3y} = \frac{7y^2}{6y^2+3y}$$

Platí:  $6y^2+3y = 3y(2y+1) \Rightarrow y \neq -\frac{1}{2}; 0$ .

$$\frac{3y}{2y+1} - \frac{y+1}{3y} = \frac{7y^2}{6y^2+3y} \quad | \cdot 3y(2y+1)$$

$$3y \cdot 3y - (y+1)(2y+1) = 7y^2$$

$$9y^2 - (2y^2 + y + 2y + 1) = 7y^2$$

$$7y^2 - 3y - 1 = 7y^2 \quad | -7y^2 + 3y$$

$$-1 = 3y \quad | :3$$

$y = -\frac{1}{3}$ , není vyloučeno podmínkou  $\Rightarrow K = \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$ .

$$c) \frac{a}{a+1} = \frac{a+1}{a-1} + \frac{a+3}{a^2-1}$$

$$\text{Platí: } a^2-1=(a-1)(a+1) \Rightarrow a \neq -1; 1.$$

$$\frac{a}{a+1} = \frac{a+1}{a-1} + \frac{a+3}{a^2-1} \quad | \cdot (a+1)(a-1)$$

$$a(a-1) = (a+1)(a+1) + a+3$$

$$a^2 - a = a^2 + 2a + 1 + a + 3 \quad | -a^2 + a$$

$$0 = 4a + 4 \quad | -4$$

$$-4 = 4a \quad | :4$$

$$a = -1, \text{ vyloučeno podmínkou } \Rightarrow K = \emptyset.$$

$$d) \frac{2x}{x+2} - \frac{x}{x+4} = \frac{x^2+4x-3}{x^2+6x+8}$$

$$\text{Platí: } x^2+6x+8=(x+4)(x+2) \Rightarrow x \neq -4; -2.$$

$$\frac{2x}{x+2} - \frac{x}{x+4} = \frac{x^2+4x-3}{x^2+6x+8} \quad | \cdot (x+4)(x+2)$$

$$2x(x+4) - x(x+2) = x^2 + 4x - 3$$

$$2x^2 + 8x - x^2 - 2x = x^2 + 4x - 3$$

$$x^2 + 6x = x^2 + 4x - 3 \quad | -x^2 - 4x$$

$$2x = -3 \quad | :2$$

$$x = -\frac{3}{2}, \text{ není vyloučeno podmínkou } \Rightarrow K = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}.$$

**Př. 4:** Vyřeš rovnici  $\frac{3}{4-x^2} + \frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{3}{x^2+x-6}$ .

Platí:

- $4-x^2=(2-x)(2+x) \Rightarrow x \neq -2; 2,$
- $x^2+5x+6=(x+2)(x+3) \Rightarrow x \neq -2; -3,$
- $x^2+x-6=(x+3)(x-2) \Rightarrow x \neq -3; 2,$

$$\Rightarrow x \neq -3; -2; 2$$

$$\frac{3}{(2-x)(2+x)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{3}{(x+3)(x-2)}$$

$$-\frac{3}{(x-2)(2+x)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{3}{(x+3)(x-2)} \quad | \cdot (x+3)(x+2)(x-2)$$

$$-3(x+3) + (x-2) = 3(x+2)$$

$$-3x-9+x-2=3x+6$$

$$-2x-11=3x+6 \quad | +2x$$

$$-11=5x+6 \quad | -6$$

$$-17 = 5x \quad /:5$$

$$x = -\frac{17}{5}, \text{ není vyloučeno podmínkou} \Rightarrow K = \left\{ -\frac{17}{5} \right\}.$$

**Př. 5:** Prostuduj řešení předchozích příkladů a najdi rovnici s neznámou ve jmenovateli, která:

- a) nemá žádné řešení a žádné řešení nebylo vyloučeno podmínkou,
- b) nemá žádné řešení, protože zdánlivé řešení bylo vyloučeno podmínkou,
- c) má nekonečně mnoho řešení, kromě jediného vyloučeného podmínkou.

a) nemá žádné řešení a žádné řešení nebylo vyloučeno podmínkou,

Rovnice 1 a)  $\frac{3a-2}{2a+1} = \frac{3}{2}$ , která po úpravách vedla k neplatné rovnosti  $6a-4 = 6a+3$ .

b) nemá žádné řešení, protože zdánlivé řešení bylo vyloučeno podmínkou,

Například rovnice 3 a)  $\frac{3}{x} - \frac{4}{x+1} = \frac{4}{x^2+x}$ , která vede na zdánlivé řešení  $-1 = x$ .

c) má nekonečně mnoho řešení, kromě jediného vyloučeného podmínkou.

Rovnice 1 d)  $\frac{2}{x-3} + 1 = \frac{x-1}{x-3}$ , která vede na vždy platnou rovnost  $x-1 = x-1$  a z řešení je kvůli podmínce vyloučeno číslo 3.

**Shrnutí:** Při řešení rovnic s neznámou ve jmenovateli musíme zkontrolovat, zda výsledek není vyloučen podmínkou.