4.2.4 Rovnice v součinovém tvaru II

Př. 1: Za jakých podmínek můžeme použít na řešení rovnic postup objevený v minulé hodině?

Například rovnice: $(x+1)(x-2)(x-10)=0$.

Využíváme toho, že součin více čísel se rovná nule, právě když je alespoň jedno z nich rovno nule $\Rightarrow$

- jedna strana rovnice se musí rovnat nule,
- druhá strana rovnice musí představovat součin čísel.

Př. 2: Vyřeš rovnice.

a) $(x+3)(3x-4)(x+127)=0$

b) $(7x-5)(2x-3)\left(x+\frac{2}{3}\right)=1$

c) $(2x+5)\left(3x-\frac{5}{6}\right)\left(5x+\sqrt{3}\right)=0$

d) $\left(x\sqrt{2}+1\right)(3x-\pi)\left(2x+\sqrt{4}\right)=0$

a) $(x+3)(x-4)(x+127)=0$

$x+3=0 \quad /-3$

$x=-3$

$3x-4=0 \quad /+4$

$3x=4 \quad /:3$

$x=\frac{4}{3}$

$x+127=0 \quad /-127$

$x=-127$

$K=\left\{-127;\frac{3}{4};4\right\}$

b) $(7x-5)(2x-3)\left(x+\frac{2}{3}\right)=1$

Na pravé straně rovnice není nula $\Rightarrow$ nemůže s rovnicí zacházet jako s rovnicí v součinovém tvaru $\Rightarrow$ tuto rovnici neumíme zatím řešit.

c) $(2x+5)\left(3x-\frac{5}{6}\right)\left(5x+\sqrt{3}\right)=0$

$2x+5=0 \quad /-5$

$2x=-5 \quad /:2$

$x=-\frac{5}{2}$

$3x-\frac{5}{6}=0 \quad /+\frac{5}{6}$

$3x=\frac{5}{6} \quad /:3$

$x=\frac{5}{18}$

$5x+\sqrt{3}=0 \quad /-\sqrt{3}$

$5x=-\sqrt{3} \quad /:5$

$x=-\frac{\sqrt{3}}{5}$

$K=\left\{-\frac{5}{2};-\frac{\sqrt{3}}{5};\frac{5}{18}\right\}$

d) $\left(x\sqrt{2}+1\right)(\pi x-2)\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}\right)=0$

$x\sqrt{2}+1=0 \quad /-1$

$x\sqrt{2}=-1 \quad /:\sqrt{2}$

$x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\pi x-2=0 \quad /+2$

$\pi x=2 \quad /:\pi$

$x=\frac{2}{\pi}$

$\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}=0 \quad /+\frac{3}{4}$

$\frac{2}{3}x=\frac{3}{4} \quad /:\frac{2}{3}$

$x=\frac{3}{4}:\frac{2}{3}=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{8}$

$K=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{2}{\pi};\frac{9}{8}\right\}$

Př. 3: Vyřeš rovnice.

a) $x^2-3x=0$ b) $2x^2-4x=0$ c) $9a^3+3a^2=0$
d) $y^2-9=0$ e) $x^2+25=0$ f) $x^2-x-12=0$
g) $x^2+3x+2=0$ h) $x^2+4x-5=0$ i) $x^3-3x^2-4x=0$
j) $x^2=16$ k) $x^2-2x=3$ l) $x^2-x-2=4$

Rovnice nejsou v součinovém tvaru $\Rightarrow$ před řešením musíme provést úpravy.

a) $x^2-3x=x(x-3)=0$ $K=\{0;3\}$

b) $2x^2-4x=2x(x-2)=0$ $K=\{0;2\}$

c) $9a^3+3a^2=3a^2(3a+1)=0$ $K=\left\{-\frac{1}{3};0\right\}$

d) $y^2-9=(y-3)(y+3)=0$ $K=\{-3;3\}$

e) $x^2+25=0$ nejde rozložit $\Rightarrow$ $K=\emptyset$ (jasné, nemáme žádné číslo, které by se po umocnění na druhou rovnalo –25.

f) $x^2-x-12=(x-4)(x+3)=0$ $K=\{-3;4\}$

g) $x^2+3x+2=(x+2)(x+1)=0$ $K=\{-2;-1\}$

h) $x^2+4x-5=(x+5)(x-1)=0$ $K=\{-5;1\}$

i) $x^3-3x^2-4x=x(x^2-3x-4)=x(x-4)(x+1)=0$ $K=\{-1;0;4\}$

j) $x^2=16 \quad /-16$

$x^2-16=(x-4)(x+4)=0$ $K=\{-4;4\}$

k) $x^2-2x=3 \quad /-3$

$x^2-2x-3=(x-3)(x+1)=0$ $K=\{-1;3\}$

l) $x^2 - x - 2 = 4 \quad / -4$

$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) = 0 \qquad K = \{-2; 3\}$

Pedagogická poznámka: Začátek předchozího příkladu je třeba ohlídat. První rovnici řeší žáci různými způsoby, občas se objevuje také vydělení rovnice neznámou, při kterém dojde ke ztrátě kořene. Já trvám na tom, aby se v zápisu objevil součinový tvar. Pak je možné ihned psát kořeny.

Př. 4: Napiš rovnici v součinovém tvaru jejímž řešením je množina $K = \left\{-2; 0; \frac{2}{3}\right\}$. Kolik takových rovnic existuje?

Každý kořen znamená jedno číslo (jednu závorku) v součinovém tvaru:

- $-2 \Rightarrow (x+2)$,
- $0 \Rightarrow x$,
- $\frac{2}{3} \Rightarrow \left(x - \frac{2}{3}\right)$.

Hledaná rovnice má tvar $(x+2)x\left(x-\frac{2}{3}\right) = 0$. Rovnici můžeme vynásobit libovolným nenulovým číslem a její řešení se nezmění $\Rightarrow$ řešení je nekonečně mnoho a dají se zapsat $k(x+2)x\left(x-\frac{2}{3}\right) = 0$, kde $k \in R - \{0\}$

Pedagogická poznámka: Následující příklad je určen pro nejlepší a nejrychlejší žáky. S celou třídou ho nerozebíráme.

Př. 5: Vyřeš nerovnici $(x-2)(x+3) \geq 0$ (podobně jako u prvního příkladu rovnice v součinovém tvaru se rozmysli, co představuje levá strana nerovnice).

Levá strana: součin dvou čísel.
Součin dvou čísle je větší než nula, právě když:

- obě čísla jsou kladná: $x > 2$ a $x > -3 \Rightarrow (2; \infty)$,
- obě čísla jsou záporná: $x < 2$ a $x < -3 \Rightarrow (-\infty; -3)$.

Obě možnosti dáme dohromady: $K = (-\infty; -3) \cup (2; \infty)$.

Shrnutí: Rovnice je v součinovém tvaru pouze tehdy, jestliže jedna strana obsahuje součin a druhá se rovná nule.