4.2.6 Kvadratické rovnice II

Předpoklady: 040205

Pedagogická poznámka: První část hodiny je třeba řídit tak, aby se s příkladem 4 začalo nejpozději 25 minut před koncem hodiny.

Př. 1: Vyřeš kvadratické rovnice.
a) $x^2-9=0$ b) $x^2+4x=0$ c) $x^2+2x+1=0$ d) $x^2+1=0$

a) $x^2-9=(x-3)(x+3)=0$ $K=\{-3;3\}$

b) $x^2+4x=x(x+4)=0$ $K=\{-4;0\}$

c) $x^2+2x+1=(x+1)^2=0$ $K=\{-1\}$

d) $x^2+1=0$, nejde rozložit, neexistuje žádné reálné číslo, které po umocnění na druhou dá -1 $\Rightarrow$ $K=\emptyset$

Př. 2: Projdi řešení předchozího příkladu a posledního příkladu minulé hodiny a rozhodni, kolik řešení může mít kvadratická rovnice.

V příkladu jsme narazili na tři možnosti. Kvadratická rovnice má:
- dvě řešení: body a), b) z příkladu 1, body a), b), c), e) z příkladu 5 z minulé hodiny,
- jedno řešení: bod c) z příkladu 1, bod f) z příkladu 5 z minulé hodiny,
- žádné řešení: bod d) z příkladu 1, bod d) z příkladu 5 z minulé hodiny.

Př. 3: Která část vzorce pro nalezení kořenů kvadratické rovnice $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ rozhoduje o tom, kolik řešení bude rovnice mít? Dokumentuj na vhodných příkladech.

První pohled: vzorec obsahuje odmocninu, kterou nedokážeme spočítat pro všechna čísla a znaménko $\pm$, které vede ke dvěma výsledkům (jednou s + a jednou s -) $\Rightarrow$
záleží na čísle, které vyjde pod odmocninou:
- pod odmocninou kladné číslo: můžeme spočítat hodnotu odmocniny $\Rightarrow$ získáme dva kořeny (jeden jako $+\sqrt{}$, druhý jako $-\sqrt{}$),
- pod odmocninou je nula: z odmocniny získáme nulu, u které je jedno, zda před ní dáme + nebo - $\Rightarrow$ v obou případech získáme stejný (tedy jeden) kořen,
- pod odmocninou je záporné číslo: odmocninu nemůžeme spočítat $\Rightarrow$ rovnice nemá řešení.

Ověření (podle výsledků z příkladu 2)
$x^2-3x+2=(x-2)(x-1)=0$, dva kořeny $\Rightarrow$ pod odmocninou by mělo vyjít kladné číslo.
$a=1;b=-3;c=2$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2}$$

$x_1=\frac{3+1}{2}=\frac{4}{2}=2$ $\qquad$ $x_2=\frac{3-1}{2}=\frac{2}{2}=1$ $\qquad$ $K=\{1;2\}$

$x^2-6x+9=(x-3)^2=0$, jeden kořen $\Rightarrow$ pod odmocninou by měla vyjít nula.
$a=1;\ b=-6;\ c=9$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot9}}{2\cdot1}=\frac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=\frac{3\pm0}{2}$$

$x_1=x_2=\frac{6}{2}=3$ $\qquad$ $K=\{3\}$

$x^2+4=0$, žádný kořen $\Rightarrow$ pod odmocninou by mělo vyjí záporné číslo.
$a=1;\ b=0;\ c=4$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-0\pm\sqrt{0^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\frac{0\pm\sqrt{-16}}{2}\qquad K=\emptyset$$

Pedagogická poznámka: Výsledky předchozího příkladu nejsou moc přesvědčivé. Radím žákům, aby se zaměřili na operace, které nemusí projít vždy, přesto po chvíli začneme řešit společně na tabuli. Ověřováním se příliš nezdržujeme, ani ho nepíšu na tabuli, jen ho ukážu na projektoru.

Výraz pod odmocninou b^2-4ac se nazývá **diskriminant** (diskriminuje, rozhoduje o počtu výsledků). Lidé pak řeší kvadratické rovnice pomocí vzorce dvěma způsoby:

1. Nejprve spočítají diskriminant a pak dosadí do zbytku vzorce.
$x^2-5x+4=0$
$a=1;\ b=-5;\ c=4$
$D=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot1\cdot4=25-16=9$ $\Rightarrow$ rovnice bude mít dvě řešení.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2\cdot1}=\frac{5\pm3}{2}$$

$x_1=\frac{5+3}{2}=\frac{8}{2}=4$ $\qquad$ $x_2=\frac{5-3}{2}=\frac{2}{2}=1$ $\qquad$ $K=\{1;4\}$

2 Dosadí rovnou do vzorce a všechno spočítají najednou.
$x^2-5x+4=0$
$a=1;\ b=-5;\ c=4$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm3}{2}$$

$x_1=\frac{5+3}{2}=\frac{8}{2}=4$ $\qquad$ $x_2=\frac{5-3}{2}=\frac{2}{2}=1$ $\qquad$ $K=\{1;4\}$

Oba způsoby jsou možné, záleží na každém, co si vybere.

Kvadratická rovnice může mít 0, 1 nebo 2 řešení, která nalezneme vzorcem
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Př. 4: Vyřeš kvadratické rovnice dosazením do vzorce.

a) $x^2 + 2x - 3 = 0$ b) $2x^2 + 5x = 0$ c) $x^2 + 3x + 1 = 0$
d) $x^2 - 4x + 4 = 0$ e) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ f) $x^2 + 2x + 3 = 0$
g) $6x^2 - 11x - 10 = 0$ h) $3x^2 - 4x + 5 = 0$ i) $2x^2 + 5x - 2 = 0$

a) $x^2 + 2x - 3 = 0$
$a = 1; b = 2; c = -3$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$x_1 = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$ $x_2 = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$ $K = \{-3; 1\}$

b) $2x^2 + 5x = 0$
$a = 2; b = 5; c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 0}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-5 \pm 5}{4}$$

$x_1 = \frac{-5+5}{4} = \frac{0}{4} = 0$ $x_2 = \frac{-5-5}{4} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}$ $K = \left\{-\frac{5}{2}; 0\right\}$

c) $x^2 + 3x + 1 = 0$
$a = 1; b = 3; c = 1$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$x_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ $x_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ $K = \left\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}; \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

d) $x^2 - 4x + 4 = 0$
$a = 1; b = -4; c = 4$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2}$$

$x_1 = x_2 = \frac{4}{2} = 2$ $K = \{2\}$

e) $2x^2 + 5x - 3 = 0$
$a = 2; b = 5; c = -3$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

$x_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{-5-7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$ $\qquad$ $K = \left\{-3; \frac{1}{2}\right\}$

f) $x^2 + 2x + 3 = 0$
$a = 1; b = 2; c = 3$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} \qquad K = \emptyset$$

g) $6x^2 - 11x - 10 = 0$
$a = 6; b = -11; c = -10$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-10)}}{2 \cdot 6} = \frac{11 \pm \sqrt{121+240}}{12} = \frac{11 \pm \sqrt{361}}{12} = \frac{11 \pm 19}{12}$$

$x_1 = \frac{11+19}{12} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{11-19}{12} = \frac{-8}{12} = -\frac{2}{3}$ $\qquad$ $K = \left\{-\frac{2}{3}; \frac{5}{2}\right\}$

h) $3x^2 - 4x + 5 = 0$
$a = 3; b = -4; c = 5$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{16-60}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{-44}}{6} \qquad K = \emptyset$$

i) $2x^2 + 5x - 2 = 0$
$a = 2; b = 5; c = -2$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+16}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{4}$$

$x_1 = \frac{-5+\sqrt{41}}{4}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{-5-\sqrt{41}}{4}$ $\qquad$ $K = \left\{\frac{-5-\sqrt{41}}{4}; \frac{-5+\sqrt{41}}{4}\right\}$

Shrnutí: Kvadratická rovnice může mít 0, 1 nebo 2 řešení, která nalezneme vzorcem $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.