

4.2.7 Kvadratické rovnice III

Předpoklady: 040206

Pedagogická poznámka: Obsah hodiny přesahuje možnosti 45 minut. Ve svých hodinách řídím práci tak, aby všichni stihli alespoň první dva body příkladu 5. Synchronizujeme na příkladu 3, nejpomalejší zkracují i první příklad, aby stihli spočítat příklad 2.

Pedagogická poznámka: V této hodině již netrvám na tom, aby si žáci vypisovali před dosazením do vzorce hodnoty koeficientů, spíš se snažím žáky motivovat, aby zkusili dosadit rovnou z rovnice.

Př. 1: Vyřeš kvadratické rovnice pomocí vzorce.

a) $4x^2 - 9 = 0$

b) $x^2 - 5x - 14 = 0$

c) $x^2 - 4x + 2 = 0$

d) $2x^2 + 2x + 3 = 0$

e) $-2x^2 + x + 3 = 0$

f) $6x^2 - 13x - 5 = 0$

a) $4x^2 - 9 = 0$

$a = 4; b = 0; c = -9$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-9)}}{2 \cdot 4} = \frac{0 \pm \sqrt{144}}{8} = \frac{0 \pm 12}{8}$$

$$x_1 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}$$

$$K = \left\{ -\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right\}$$

b) $x^2 - 5x - 14 = 0$

$a = 1; b = -5; c = -14$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{5 \pm 9}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+9}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$x_2 = \frac{5-9}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$K = \{-2; 7\}$$

c) $x^2 - 4x + 2 = 0$

$a = 1; b = -4; c = 2$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 = \frac{4+2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(2+\sqrt{2})}{2} = 2+\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{4-2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(2-\sqrt{2})}{2} = 2-\sqrt{2}$$

$$K = \{2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}\}$$

d) $2x^2 + 2x + 3 = 0$

$a = 2; b = 2; c = 3$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-20}}{4} \Rightarrow D < 0 \Rightarrow K = \emptyset$$

e) $-2x^2 + x + 3 = 0$
 $a = -2; b = 1; c = 3$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{-4} = \frac{-1 \pm 5}{-4}$$

$$x_1 = \frac{-1+5}{-4} = -\frac{4}{4} = -1 \qquad x_2 = \frac{-1-5}{-4} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2} \qquad K = \left\{ -1; \frac{3}{2} \right\}$$

f) $6x^2 - 13x - 5 = 0$
 $a = 6; b = -13; c = -5$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-5)}}{2 \cdot 6} = \frac{13 \pm \sqrt{169 + 120}}{12} = \frac{13 \pm 17}{12}$$

$$x_1 = \frac{13+17}{12} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2} \qquad x_2 = \frac{13-17}{12} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3} \qquad K = \left\{ -\frac{1}{3}; \frac{5}{2} \right\}$$

Př. 2: Vyřeš kvadratickou rovnici $3x^2 + 5x = 0$:

a) převedením na součinný tvar, b) pomocí vzorce.

a) převedením na součinný tvar

$$3x^2 + 5x = x(3x + 5) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad K = \left\{ -\frac{5}{3}; 0 \right\}$$

b) pomocí vzorce

$3x^2 + 5x = 0$
 $a = 3; b = 5; c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 0}}{6} = \frac{-5 \pm 5}{6}$$

$$x_1 = \frac{-5+5}{6} = \frac{0}{6} = 0 \qquad x_2 = \frac{-5-5}{6} = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3} \qquad K = \left\{ -\frac{5}{3}; 0 \right\}$$

Př. 3: Vyřeš kvadratické rovnice. Vysvětli.

a) $3x^2 - 7x - 6 = 0$

b) $15x^2 - 35x - 30 = 0$

c) $x^2 - \frac{7}{3}x - 2 = 0$

a) $3x^2 - 7x - 6 = 0$
 $a = 3; b = -7; c = -6$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 72}}{6} = \frac{7 \pm 11}{6}$$

$$x_1 = \frac{7+11}{6} = \frac{18}{6} = 3 \qquad x_2 = \frac{7-11}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \qquad K = \left\{ 3; -\frac{2}{3} \right\}$$

$$\text{b) } 15x^2 - 35x - 30 = 0$$

$$a = 15; b = -35; c = -30$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-35) \pm \sqrt{(-35)^2 - 4 \cdot 15 \cdot (-30)}}{2 \cdot 15} = \frac{35 \pm \sqrt{1225 + 1800}}{30} = \frac{35 \pm 55}{30}$$

$$x_1 = \frac{35 + 55}{30} = \frac{90}{30} = 3 \qquad x_2 = \frac{35 - 55}{30} = \frac{-20}{30} = -\frac{2}{3} \qquad K = \left\{ 3; -\frac{2}{3} \right\}$$

$$\text{c) } x^2 - \frac{7}{3}x - 2 = 0$$

$$a = 1; b = -\frac{7}{3}; c = -2$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\left(-\frac{7}{3}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{7}{3}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{\frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9} + 8}}{2} = \frac{\frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49 + 72}{9}}}{2} = \frac{\frac{7}{3} \pm \frac{11}{3}}{2}$$

$$x_1 = \frac{\frac{7}{3} + \frac{11}{3}}{2} = \frac{\frac{18}{3}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \qquad x_2 = \frac{\frac{7}{3} - \frac{11}{3}}{2} = \frac{\frac{-4}{3}}{2} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} \qquad K = \left\{ 3; -\frac{2}{3} \right\}$$

Pedagogická poznámka: Pokud někdo u předchozího příkladu pozná, že jde pořád o stejnou rovnici a dokáže svůj závěr vysvětlit, samozřejmě netrvám na tom, aby počítal všechny tři varianty.

Př. 4: Zhodnot' průběh a výsledky předchozích dvou příkladů a sestav obecný postup, jak co nejefektivněji řešit kvadratické rovnice.

Příklad 2: Řešení rovnice pomocí součinnového tvaru bylo daleko jednodušší než dosazením do vzorce \Rightarrow pokud dokážeme najít rychle rozklad na součin, je výhodnější řešit kvadratické rovnice rozložením na součin a určením kořenů ze součinnového tvaru.

Příklad 3: Všechny tři zadané rovnice měly stejná řešení, což je pochopitelné, protože:

- rovnice $15x^2 - 35x - 30 = 0$ v bodu b) vznikla z rovnice $3x^2 - 7x - 6 = 0$ vynásobením pěti (což je ekvivalentní úprava, která řešení rovnice nemění),
- rovnice $x^2 - \frac{7}{3}x - 2 = 0$ v bodu b) vznikla z rovnice $3x^2 - 7x - 6 = 0$ vydělením třemi (což je ekvivalentní úprava, která řešení rovnice nemění).

Ve skutečnosti tedy šlo o tři různé tvary stejné rovnice. První tvar se řešil nejsnáze, protože neobsahoval zlomky a jeho koeficienty byly co "nejmenší" celá čísla \Rightarrow před dosazením do vzorce je vhodné rovnici vydělit nebo vynásobit tak, aby její koeficienty byla celá čísla s co nejmenší absolutní hodnotou.

Postupujeme v následujících krocích:

- Převědeme všechny členy rovnice na jednu stranu (na nulový tvar).
- Rovnici vydělíme nebo vynásobíme tak, aby její koeficienty byla celá čísla s co nejmenší absolutní hodnotou (celá čísla co nejbližší nule).

- Pokusíme se rovnici vyřešit převedením na součinný tvar (vytknutí x nebo rozklad trojčlenu hledáním dvou čísel do dvou závorek).
- Pokud není možné vyřešit rovnici převedením na součinný tvar, dosadíme do vzorce.

Pedagogická poznámka: V diskusi ve třídě se určitě objeví termín "nejmenší čísla", který je uváděn v řešení příkladu. Moc to nerozebíráme, jde spíš o důsledek v rozdílném pojmenování. Zeptám se dětí, zda by se rovnice $33x^2 - 77x - 66 = 0$ řešila lépe než původní rovnice $3x^2 - 7x - 6 = 0$ a je jasno.

Př. 5: S pomocí kalkulačky najdi s přesností na dvě desetinná čísla kořeny kvadratických rovnic.

- a) $x^2 + 3x - 2 = 0$ b) $3x^2 - 7x + 11 = 0$ c) $7x^2 - 11x - 23 = 0$
d) $2,1x^2 + 5,7x - 1,9 = 0$ e) $-4x^2 + 23x + 12 = 0$ f) $47x^2 - 51x - 125 = 0$

a) $x^2 + 3x - 2 = 0$
 $a = 1; b = 3; c = -2$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} = \frac{-3 \pm 4,123}{2}$$

$$x_1 = \frac{-3 + 4,123}{2} = 0,56 \quad x_2 = \frac{-3 - 4,123}{2} = -3,56 \quad K = \{-3,56; 0,56\}$$

b) $3x^2 - 7x + 11 = 0$
 $a = 3; b = -7; c = 11$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 11}}{2 \cdot 3} = \frac{7 \pm \sqrt{-83}}{2} \Rightarrow D < 0 \Rightarrow K = \emptyset$$

c) $7x^2 - 11x - 23 = 0$
 $a = 7; b = -11; c = -23$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-23)}}{2 \cdot 7} = \frac{11 \pm \sqrt{765}}{14} = \frac{11 \pm 27,659}{14}$$

$$x_1 = \frac{11 + 27,659}{14} = 19,33 \quad x_2 = \frac{11 - 27,659}{14} = -8,33 \quad K = \{-1,19; 2,76\}$$

d) $2,1x^2 + 5,7x - 1,9 = 0$
 $a = 2,1; b = 5,7; c = -1,9$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5,7 \pm \sqrt{5,7^2 - 4 \cdot 2,1 \cdot (-1,9)}}{2 \cdot 2,1} = \frac{-5,7 \pm \sqrt{48,45}}{4,2} = \frac{-5,7 \pm 6,961}{4,2}$$

$$x_1 = \frac{-5,7 + 6,961}{4,2} = 0,30 \quad x_2 = \frac{-5,7 - 6,961}{4,2} = -3,01 \quad K = \{-3,01; 0,30\}$$

e) $-4x^2 + 23x + 12 = 0$
 $a = -4; b = 23; c = 12$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-23 \pm \sqrt{23^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 12}}{2 \cdot (-4)} = \frac{-23 \pm \sqrt{721}}{-8} = \frac{-23 \pm 26,851}{-8}$$

$$x_1 = \frac{-23 + 26,851}{-8} = -0,48 \quad x_2 = \frac{-23 - 26,851}{-8} = 6,23 \quad K = \{-0,48; 6,23\}$$

f) $47x^2 - 51x - 125 = 0$
 $a = 47; b = -51; c = -125$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-51) \pm \sqrt{(-51)^2 - 4 \cdot 47 \cdot (-125)}}{2 \cdot 47} = \frac{51 \pm \sqrt{26101}}{94} = \frac{51 \pm 161,558}{94}$$

$$x_1 = \frac{51 + 161,558}{94} = 2,26 \quad x_2 = \frac{51 - 161,558}{94} = -1,18 \quad K = \{-1,18; 2,26\}$$

Kvadratické rovnice můžeme řešit také na některých kalkulačkách (jde o vyšší typy vědeckých kalkulátorů, které jsou zakázány u státních maturit).

Následující postup platí pro kalkulačky CASIO (konkrétně typ fx-570MS)

- Tlačítkem MODE přepínáme, dokud se na display neobjeví mód pro řešení rovnic EQN.
- Přepneme do tohoto módu odpovídajícím tlačítkem (v našem případě 1).
- Nevolíme počet neznámých (otázka Unknowns?), ale přejdeme doprava na další nabídku tlačítkem REPLAY.
- Zvolíme 2 stupeň (otázka Degree?).
- Na display se objeví dotaz na jednotlivé koeficienty soustavy (jako první a), zadání koeficientů ukončíme tlačítkem =. Koeficienty se zadávají z klasického tvaru $ax^2 + bx + c = 0$.
- Po zadání posledního koeficientu zobrazí kalkulačka kořeny rovnice.

Př. 6: Vypočti pomocí kalkulačky kořeny rovnic z předchozího příkladu.

Př. 7: Jak vypadají kvadratické rovnice, pro které platí:

- a) kořeny jsou dvě navzájem opačná čísla, b) jedním z kořenů je číslo 0.

a) kořeny jsou dvě navzájem opačná čísla

Ze vzorce $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ je zřejmé, že pokud mají být kořeny navzájem opačná čísla, musí být platit $b = 0$ (vypadne část vzorce před odmocninou).

b) jedním z kořenů je číslo 0

Pokud má být jedním z kořenů číslo 0, musí být možné rovnici rozložit na součin

$$x(ax + b) = 0 \Rightarrow \text{pro koeficient } c \text{ musí platit } c = 0.$$

Př. 8: Co musí platit pro koeficienty a, b, c kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, abychom si mohli být bez počítání jisti, že má rovnice dva různé kořeny?

Rovnice má dva různé kořeny, pokud je diskriminant $b^2 - 4ac > 0$:

- $b^2 > 0$ vždy \Rightarrow na hodnotě koeficientu b nezáleží,
- $-4ac$ musí být také kladné \Rightarrow jeden z koeficientů a, c je kladný a druhý záporný.

Bez počítání si můžeme být jistí, že kvadratická rovnice má dva kořeny, právě když mají koeficienty a, c různá znaménka.

Dodatek: Kvadratická rovnice můžeme mít dva různé kořeny i v případě, že mají koeficienty a, c stejná znaménka, ale v takovém případě musíme spočítat diskriminant.

Př. 9: Vyřeš kvadratické rovnice pomocí vzorce přímo v zadaném tvaru.

$$\text{a) } \frac{2}{3}x^2 + \frac{x}{2} - \frac{3}{4} = 0 \quad \text{b) } x^2 - x\sqrt{2} - 1 = 0 \quad \text{c) } \frac{x^2}{2} + x + x\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$$

$$\text{a) } \frac{2}{3}x^2 + \frac{x}{2} - \frac{3}{4} = 0$$

$$a = \frac{2}{3}; b = \frac{1}{2}; c = -\frac{3}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)}}{2 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}}{\frac{4}{3}} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}}{\frac{4}{3}} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}}{\frac{4}{3}}$$

$$x_1 = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{2}{2}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \quad x_2 = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{\frac{4}{3}} = \frac{-\frac{4}{2}}{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{2} \quad K = \left\{ -\frac{3}{2}; \frac{3}{4} \right\}$$

$$\text{b) } x^2 - x\sqrt{2} - 1 = 0$$

$$a = 1; b = -\sqrt{2}; c = -1$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-\sqrt{2}) \pm \sqrt{(-\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2+4}}{2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{2}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \quad x_2 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} \quad K = \left\{ \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \right\}$$

$$\text{c) } \frac{x^2}{2} + x + x\sqrt{2} + \sqrt{2} = \frac{x^2}{2} + x(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} = 0$$

$$a = \frac{1}{2}; b = 1 + \sqrt{2}; c = \sqrt{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(1 + \sqrt{2}) \pm \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{-1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{1 + 2\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2}}}{1} =$$

$$= -1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{3}$$

$$x_1 = -1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} \quad x_2 = -1 - \sqrt{2} - \sqrt{3} \quad K = \left\{ -1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}; -1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} \right\}$$

Dodatek: Rovnici $\frac{2}{3}x^2 + \frac{x}{2} - \frac{3}{4} = 0$ je daleko rychlejší řešit vynásobením 12:

$$\frac{2}{3}x^2 + \frac{x}{2} - \frac{3}{4} = 0 \quad / \cdot 12$$

$$8x^2 + 6x - 9 = 0$$

Shrnutí: Vzorcem řešíme pouze ty kvadratické rovnice, které není možné vyřešit jinak (převedením na součinný tvar).