4.2.7 Kvadratické rovnice III

Předpoklady: 040206

Pedagogická poznámka: Obsah hodiny přesahuje možnosti 45 minut. Ve svých hodinách řídím práci tak, aby všichni stihli alespoň první dva body příkladu 5. Synchronizujeme na příkladu 3, nejpomalejší zkracují i první příklad, aby stihli spočítat příklad 2.

Pedagogická poznámka: V této hodině již netrvám na tom, aby si žáci vypisovali před dosazením do vzorce hodnoty koeficientů, spíš se snažím žáky motivovat, aby zkoušeli dosadit rovnou z rovnice.

Př. 1: Vyřeš kvadratické rovnice pomocí vzorce.

a) $4x^2-9=0$ b) $x^2-5x-14=0$ c) $x^2-4x+2=0$

d) $2x^2+2x+3=0$ e) $-2x^2+x+3=0$ f) $6x^2-13x-5=0$

a) $4x^2-9=0$

$a=4;\ b=0;\ c=-9$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-0\pm\sqrt{0^2-4\cdot4\cdot(-9)}}{2\cdot4}=\frac{0\pm\sqrt{144}}{8}=\frac{0\pm12}{8}$$

$x_1=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ $x_2=\frac{-12}{8}=-\frac{3}{2}$ $K=\left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$

b) $x^2-5x-14=0$

$a=1;\ b=-5;\ c=-14$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot(-14)}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{81}}{2}=\frac{5\pm9}{2}$$

$x_1=\frac{5+9}{2}=\frac{14}{2}=7$ $x_2=\frac{5-9}{2}=-\frac{4}{2}=-2$ $K=\{-2;7\}$

c) $x^2-4x+2=0$

$a=1;\ b=-4;\ c=2$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{2}$$

$x_1=\frac{4+2\sqrt{2}}{2}=\frac{2\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}=2+\sqrt{2}$ $x_2=\frac{4-2\sqrt{2}}{2}=\frac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}=2-\sqrt{2}$

$K=\left\{2-\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right\}$

d) $2x^2+2x+3=0$

$a=2;\ b=2;\ c=3$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 2\cdot 3}}{2\cdot 2}=\frac{-2\pm\sqrt{-20}}{4}\Rightarrow D<0\Rightarrow K=\emptyset$$

e) $-2x^2+x+3=0$
$a=-2; b=1; c=3$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-2)\cdot 3}}{2\cdot(-2)}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{-4}=\frac{-1\pm 5}{-4}$$

$x_1=\frac{-1+5}{-4}=-\frac{4}{4}=-1$ $\qquad x_2=\frac{-1-5}{-4}=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}$ $\qquad K=\left\{-1;\frac{3}{2}\right\}$

f) $6x^2-13x-5=0$
$a=6; b=-13; c=-5$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-13)\pm\sqrt{(-13)^2-4\cdot 6\cdot(-5)}}{2\cdot 6}=\frac{13\pm\sqrt{169+120}}{12}=\frac{13\pm 17}{12}$$

$x_1=\frac{13+17}{12}=\frac{30}{12}=\frac{5}{2}$ $\qquad x_2=\frac{13-17}{12}=\frac{-4}{12}=-\frac{1}{3}$ $\qquad K=\left\{-\frac{1}{3};\frac{5}{2}\right\}$

Př. 2: Vyřeš kvadratickou rovnici $3x^2+5x=0$:
a) převedením na součinový tvar, b) pomocí vzorce.

a) převedením na součinový tvar

$3x^2+5x=x(3x+5)=0 \qquad\Rightarrow\qquad K=\left\{-\frac{5}{3};0\right\}$

b) pomocí vzorce
$3x^2+5x=0$
$a=3; b=5; c=0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 3\cdot 0}}{2\cdot 3}=\frac{-5\pm\sqrt{25+0}}{6}=\frac{-5\pm 5}{6}$$

$x_1=\frac{-5+5}{6}=\frac{0}{6}=0$ $\qquad x_2=\frac{-5-5}{6}=\frac{-10}{6}=-\frac{5}{3}$ $\qquad K=\left\{-\frac{5}{3};0\right\}$

Př. 3: Vyřeš kvadratické rovnice. Vysvětli.
a) $3x^2-7x-6=0$ b) $15x^2-35x-30=0$ c) $x^2-\frac{7}{3}x-2=0$

a) $3x^2-7x-6=0$
$a=3; b=-7; c=-6$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 3\cdot(-6)}}{2\cdot 3}=\frac{7\pm\sqrt{49+72}}{6}=\frac{7\pm 11}{6}$$

$x_1=\frac{7+11}{6}=\frac{18}{6}=3$ $\qquad x_2=\frac{7-11}{6}=\frac{-4}{6}=-\frac{2}{3}$ $\qquad K=\left\{3;-\frac{2}{3}\right\}$

b) $15x^2 - 35x - 30 = 0$
$a = 15; b = -35; c = -30$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-35) \pm \sqrt{(-35)^2 - 4 \cdot 15 \cdot (-30)}}{2 \cdot 15} = \frac{35 \pm \sqrt{1225 + 1800}}{30} = \frac{35 \pm 55}{30}$$

$$x_1 = \frac{35+55}{30} = \frac{90}{30} = 3 \qquad x_2 = \frac{35-55}{30} = \frac{-20}{30} = -\frac{2}{3} \qquad K = \left\{3; -\frac{2}{3}\right\}$$

c) $x^2 - \frac{7}{3}x - 2 = 0$

$a = 1; b = -\frac{7}{3}; c = -2$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\left(-\frac{7}{3}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{7}{3}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{\frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9} + 8}}{2} = \frac{\frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49+72}{9}}}{2} = \frac{\frac{7}{3} \pm \frac{11}{3}}{2}$$

$$x_1 = \frac{\frac{7}{3} + \frac{11}{3}}{2} = \frac{\frac{18}{3}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \qquad x_2 = \frac{\frac{7}{3} - \frac{11}{3}}{2} = \frac{-\frac{4}{3}}{2} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} \qquad K = \left\{3; -\frac{2}{3}\right\}$$

Pedagogická poznámka: Pokud někdo u předchozího příkladu pozná, že jde pořád o stejnou rovnici a dokáže svůj závěr vysvětlit, samozřejmě netrvám na tom, aby počítal všechny tři varianty.

Př. 4: Zhodnoť průběh a výsledky předchozích dvou příkladů a sestav obecný postup, jak co nejefektivněji řešit kvadratické rovnice.

Příklad 2: Řešení rovnice pomocí součinového tvaru bylo daleko jednodušší než dosazením do vzorce $\Rightarrow$ pokud dokážeme najít rychle rozklad na součin, je výhodnější řešit kvadratické rovnice rozložením na součin a určením kořenů ze součinového tvaru.

Příklad 3: Všechny tři zadané rovnice měly stejná řešení, což je pochopitelné, protože:

- rovnice $15x^2 - 35x - 30 = 0$ v bodu b) vznikla z rovnice $3x^2 - 7x - 6 = 0$ vynásobením pěti (což je ekvivalentní úprava, která řešení rovnice nemění),
- rovnice $x^2 - \frac{7}{3}x - 2 = 0$ v bodu b) vznikla z rovnice $3x^2 - 7x - 6 = 0$ vydělením třemi (což je ekvivalentní úprava, která řešení rovnice nemění).

Ve skutečnosti tedy šlo o tři různé tvary stejné rovnice. První tvar se řešil nejsnáze, protože neobsahoval zlomky a jeho koeficienty byly co "nejmenší" celá čísla $\Rightarrow$ před dosazením do vzorce je vhodné rovnici vydělit nebo vynásobit tak, aby její koeficienty byla celá čísla s co nejmenší absolutní hodnotou.

Postupujeme v následujících krocích:

- Převedeme všechny členy rovnice na jednu stranu (na nulový tvar).
- Rovnici vydělíme nebo vynásobíme tak, aby její koeficienty byla celá čísla s co nejmenší absolutní hodnotou (celá čísla co nejbližší nule).

- Pokusíme se rovnici vyřešit převedením na součinový tvar (vytknutí x nebo rozklad trojčlenu hledáním dvou čísel do dvou závorek).
- Pokud není možné vyřešit rovnici převedením na součinový tvar, dosadíme do vzorce.

Pedagogická poznámka: V diskusi ve třídě se určitě objeví termín "nejmenší čísla", který je uváděn v řešení příkladu. Moc to nerozebíráme, jde spíš o důsledek v rozdílném pojmenování. Zeptám se dětí, zda by se rovnice $33x^2-77x-66=0$ řešila lépe než původní rovnice $3x^2-7x-6=0$ a je jasno.

Př. 5: S pomocí kalkulačky najdi s přesnosti na dvě desetinná čísla kořeny kvadratických rovnic.

a) $x^2+3x-2=0$ b) $3x^2-7x+11=0$ c) $7x^2-11x-23=0$

d) $2,1x^2+5,7x-1,9=0$ e) $-4x^2+23x+12=0$ f) $47x^2-51x-125=0$

a) $x^2+3x-2=0$

$a=1; b=3; c=-2$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}=\frac{-3\pm4,123}{2}$$

$x_1=\frac{-3+4,123}{2}=0,56$ $x_2=\frac{-3-4,123}{2}=-3,56$ $K=\{-3,56; 0,56\}$

b) $3x^2-7x+11=0$

$a=3; b=-7; c=11$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot3\cdot11}}{2\cdot3}=\frac{7\pm\sqrt{-83}}{2}\Rightarrow D<0\Rightarrow K=\emptyset$$

c) $7x^2-11x-23=0$

$a=7; b=-11; c=-23$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-11)\pm\sqrt{(-11)^2-4\cdot7\cdot(-23)}}{2\cdot7}=\frac{11\pm\sqrt{765}}{14}=\frac{11\pm27,659}{14}$$

$x_1=\frac{11+27,659}{14}=19,33$ $x_2=\frac{11-27,659}{14}=-8,33$ $K=\{-1,19; 2,76\}$

d) $2,1x^2+5,7x-1,9=0$

$a=2,1; b=5,7; c=-1,9$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-5,7\pm\sqrt{5,7^2-4\cdot2,1\cdot(-1,9)}}{2\cdot2,1}=\frac{-5,7\pm\sqrt{48,45}}{4,2}=\frac{-5,7\pm6,961}{4,2}$$

$x_1=\frac{-5,7+6,961}{4,2}=0,30$ $x_2=\frac{-5,7-6,961}{4,2}=-3,01$ $K=\{-3,01; 0,30\}$

e) $-4x^2+23x+12=0$

$a=-4; b=23; c=12$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-23\pm\sqrt{23^2-4\cdot(-4)\cdot 12}}{2\cdot(-4)}=\frac{-23\pm\sqrt{721}}{-8}=\frac{-23\pm 26,851}{-8}$$

$x_1=\frac{-23+26,851}{-8}=-0,48$ $\qquad$ $x_2=\frac{-23-26,851}{-8}=6,23$ $\qquad$ $K=\{-0,48;6,23\}$

f) $47x^2-51x-125=0$
$a=47;b=-51;c=-125$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-51)\pm\sqrt{(-51)^2-4\cdot 47\cdot(-125)}}{2\cdot 47}=\frac{51\pm\sqrt{26101}}{94}=\frac{51\pm 161,558}{94}$$

$x_1=\frac{51+161,558}{94}=2,26$ $\qquad$ $x_2=\frac{51-161,558}{94}=-1,18$ $\qquad$ $K=\{-1,18;2,26\}$

Kvadratické rovnice můžeme řešit také na některých kalkulačkách (jde o vyšší typy vědeckých kalkulátorů, které jsou zakázány u státních maturit).
Následující postup platí pro kalkulačky CASIO (konkrétně typ fx-570MS)

- Tlačítkem MODE přepínáme dokud se na display neobjeví mód pro řešení rovnic EQN.
- Přepneme do tohoto módu odpovídajícím tlačítkem (v našem případě 1).
- Nevolíme počet neznámých (otázka Unknowns?), ale přejdeme doprava na další nabídku tlačítkem REPLAY.
- Zvolíme 2 stupeň (otázka Degree?).
- Na display se objeví dotaz na jednotlivé koeficienty soustavy (jako první *a*), zadání koeficientů ukončujeme tlačítkem =. Koeficienty se zadávají z klasického tvaru $ax^2+bx+c=0$.
- Po zadání posledního koeficientu zobrazí kalkulačka kořeny rovnice.

Př. 6: Vypočti pomocí kalkulačky kořeny rovnic z předchozího příkladu.

Př. 7: Jak vypadají kvadratické rovnice, pro které platí:
a) kořeny jsou dvě navzájem opačná čísla, b) jedním z kořenů je číslo 0.

a) kořeny jsou dvě navzájem opačná čísla
Ze vzorce $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ je zřejmé, že pokud mají být kořeny navzájem opačná čísla, musí být platit $b=0$ (vypadne část vzorce před odmocninou).

b) jedním z kořenů je číslo 0
Pokud má být jedním z kořenů číslo 0, musí být možné rovnici rozložit na součin $x(ax+b)=0$ $\Rightarrow$ pro koeficient *c* musí platit $c=0$.

Př. 8: Co musí platit pro koeficienty *a*, *b*, *c* kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0$, abychom si mohli být bez počítání jisti, že má rovnice dva různé kořeny?

Rovnice má dva různé kořeny, pokud je diskriminant $b^2-4ac>0$:

- $b^2 > 0$ vždy $\Rightarrow$ na hodnotě koeficientu v nezáleží,
- $-4ac$ musí být také kladné $\Rightarrow$ jeden z koeficientů a, c je kladný a druhý záporný.

Bez počítání si můžeme být jistí, že kvadratická rovnice má dva koeficienty, právě když mají koeficienty a, c různá znaménka.

Dodatek: Kvadratická rovnice můžeme mít dva různé kořeny i v případě, že mají koeficienty a, c stejná znaménka, ale v takovém případě musíme spočítat diskriminant.

Př. 9: Vyřeš kvadratické rovnice pomocí vzorce přímo v zadaném tvaru.

a) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{x}{2} - \frac{3}{4} = 0$ b) $x^2 - x\sqrt{2} - 1 = 0$ c) $\frac{x^2}{2} + x + x\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$

a) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{x}{2} - \frac{3}{4} = 0$

$a = \frac{2}{3}; b = \frac{1}{2}; c = -\frac{3}{4}$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)}}{2 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}}{\frac{4}{3}} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}}{\frac{4}{3}} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}}{\frac{4}{3}}$$

$x_1 = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{2}{2}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$ $x_2 = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{\frac{4}{3}} = \frac{-\frac{4}{2}}{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{2}$ $K = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right\}$

b) $x^2 - x\sqrt{2} - 1 = 0$

$a = 1; b = -\sqrt{2}; c = -1$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\left(-\sqrt{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2+4}}{2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{2}$$

$x_1 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$ $x_2 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$ $K = \left\{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}\right\}$

c) $\frac{x^2}{2} + x + x\sqrt{2} + \sqrt{2} = \frac{x^2}{2} + x\left(1 + \sqrt{2}\right) + \sqrt{2} = 0$

$a = \frac{1}{2}; b = 1 + \sqrt{2}; c = \sqrt{2}$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\left(1+\sqrt{2}\right) \pm \sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{-1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{1 + 2\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2}}}{1} =$$

$= -1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{3}$

$x_1 = -1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$ $x_2 = -1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ $K = \left\{-1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}; -1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}\right\}$

Dodatek: Rovnici $\frac{2}{3}x^2+\frac{x}{2}-\frac{3}{4}=0$ je daleko rychlejší řešit vynásobením 12:

$$\frac{2}{3}x^2+\frac{x}{2}-\frac{3}{4}=0 \qquad /\cdot 12$$

$$8x^2+6x-9=0$$

Shrnutí: Vzorcem řešíme pouze ty kvadratické rovnice, které není možné vyřešit jinak (převedením na součinový tvar).