

4.2.1 Kvadratické rovnice IV

Předpoklady: 040207

Pedagogická poznámka: Obsah hodiny nemůže běžný žák za 45 minut rozhodně stihnout. Do konce většinou nedorazí ani Ti nejrychlejší. Předposlední příklad je tak spíš ukázkou toho, co může v budoucnosti ještě čekat. Snažím se postupovat tak, aby všichni stihli první příklad (maximálně bez bodu i) a první dva body příkladu 2.

Pedagogická poznámka: Poslední příklad zadáváme na konci jako domácí práci na příští hodinu.

Pedagogická poznámka: Při zadávání prvního příkladu kladu důraz na slovo nejefektivněji a upozorňuji, že řešení některých bodů vzorcem takovým řešením rozhodně není. Ověřování výsledků takových bodů vzorcem po žácích nechci, je uvedeno pouze v učebnici pro případné šouraly.

Př. 1: Vyřeš co nejefektivněji kvadratické rovnice.

a) $9x^2 + 16 = 0$

b) $x^2 - 7x + 12 = 0$

c) $x^2 + 2x - 1 = 0$

d) $3x^2 - 5x - 12 = 0$

e) $x^2 - 5 = 0$

f) $x^2 - 3x - 18 = 0$

g) $8x^2 + 18x - 5 = 0$

h) $4x^2 + 9x = 0$

i) $2,3x^2 + 7,1x + 2,9 = 0$

a) $9x^2 + 16 = 0$

$K = \emptyset$

Zdůvodnění: Při dosazení libovolného čísla za x bude hodnota výrazu $9x^2$ nulová nebo větší než nula, po přičtení 16 se nemůže rovnat nule (argumentace „z druhé strany“: aby se hodnota levé strany rovnala nule, musel by výraz $9x^2$ vyjít -16 , co nikdy nenastane).

Ověření pomocí vzorce: $a = 9; b = 0; c = 16$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 9 \cdot 16}}{2 \cdot 9} = \frac{0 \pm \sqrt{-576}}{18} \Rightarrow D < 0 \Rightarrow K = \emptyset$$

b) $x^2 - 7x + 12 = (x - 4)(x - 3) = 0 \Rightarrow K = \{3; 4\}$

Ověření pomocí vzorce: $a = 1; b = -7; c = 12$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$K = \{3; 4\}$$

c) $x^2 + 2x - 1 = 0$

$a = 1; b = 2; c = -1$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{2(-1 \pm \sqrt{2})}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$x_1 = 1 + \sqrt{2} \quad x_2 = 1 - \sqrt{2} \quad K = \{1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\}$$

d) $3x^2 - 5x - 12 = 0$

$a = 3; b = 5; c = -12$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-12)}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{6} = \frac{5 \pm 13}{6}$$

$$x_1 = \frac{5+13}{6} = \frac{18}{6} = 3 \quad x_2 = \frac{5-13}{6} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3} \quad K = \left\{ -\frac{4}{3}; 3 \right\}$$

e) $x^2 - 5 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0 \Rightarrow K = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$

Ověření pomocí vzorce: $a = 1; b = 0; c = 5$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{\pm \sqrt{20}}{2} = \frac{\pm \sqrt{4} \sqrt{5}}{2} = \frac{\pm 2\sqrt{5}}{2} = \pm \sqrt{5}$$

$$K = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$$

f) $x^2 - 3x - 18 = (x - 6)(x + 3) = 0 \Rightarrow K = \{-3; 6\}$

Ověření pomocí vzorce: $a = 1; b = -3; c = -18$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 72}}{2} = \frac{3 \pm 9}{2}$$

$$x_1 = \frac{3+9}{2} = \frac{12}{2} = 6 \quad x_2 = \frac{3-9}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \quad K = \{-3; 6\}$$

g) $8x^2 + 18x - 5 = 0$

$a = 8; b = 18; c = -5$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-5)}}{2 \cdot 8} = \frac{-18 \pm \sqrt{484}}{16} = \frac{-18 \pm 22}{16}$$

$$x_1 = \frac{-18+22}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \quad x_2 = \frac{-18-22}{16} = \frac{-40}{16} = -\frac{5}{2} \quad K = \left\{ -\frac{5}{2}; \frac{1}{4} \right\}$$

h) $4x^2 + 9x = x(4x + 9) = 0 \Rightarrow K = \left\{ -\frac{9}{4}; 0 \right\}$

Ověření pomocí vzorce: $a = 4; b = 9; c = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 4 \cdot 0}}{2 \cdot 4} = \frac{-9 \pm \sqrt{81}}{8} = \frac{-9 \pm 9}{8}$$

$$x_1 = \frac{-9+9}{8} = \frac{0}{8} = 0 \quad x_2 = \frac{-9-9}{8} = \frac{-18}{8} = -\frac{9}{4} \quad K = \left\{ -\frac{9}{4}; 0 \right\}$$

i) $2,3x^2 + 7,1x + 2,9 = 0$

$a = 2,3; b = 7,1; c = 2,9$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7,1 \pm \sqrt{7,1^2 - 4 \cdot 2,3 \cdot 2,9}}{2 \cdot 2,3} = \frac{-7,1 \pm \sqrt{23,73}}{4,6} = \frac{-7,1 \pm 4,871}{4,6}$$

$$x_1 = \frac{-7,1 + 4,871}{4,6} = -0,48 \quad x_2 = \frac{-7,1 - 4,871}{4,6} = -2,60 \quad K = \{-2,60; -0,48\}$$

U některých rovnic není zpočátku jasné, zda jsou kvadratické. Musíme je proto nejdříve upravit.

Př. 2: Vyřeš rovnice.

a) $(x-2)^2 = (2x+5)^2$ b) $(2x-3)^2 - x(x-3) = (3x+1)(x-2)$

c) $(3y+1)(3y+11) = (y-3)(y+5)$

a) $(x-2)^2 = (2x+5)^2$

$$x^2 - 4x + 4 = 4x^2 + 20x + 25 \quad / -x^2 + 4x - 4$$

$$0 = 3x^2 + 24x + 21 \quad / :3$$

$$x^2 + 8x + 7 = 0$$

$$(x+7)(x+1) = 0 \quad K = \{-7; -1\}$$

b) $(2x-3)^2 - x(x-3) = (3x+1)(x-2)$

$$4x^2 - 12x + 9 - x^2 + 3x = 3x^2 - 6x + x - 2$$

$$3x^2 - 9x + 9 = 3x^2 - 5x - 2 \quad / -3x^2 + 5x + 2$$

$$-4x + 11 = 0 \quad / +4x$$

Lineární rovnice \Rightarrow nepotřebujeme vzorec pro kvadratickou rovnici, řešíme klasicky vyjádřením x .

$$11 = 4x \quad / :4$$

$$x = \frac{11}{4} \quad K = \left\{ \frac{11}{4} \right\}$$

c) $(3y+1)(3y+11) = (y-3)(y+5)$

$$9y^2 + 33y + 3y + 11 = y^2 + 5y - 3y - 15$$

$$9y^2 + 36y + 11 = y^2 + 2y - 15 \quad / -y^2 - 2y + 15$$

$$8y^2 + 34y + 26 = 0 \quad / :2$$

$$4y^2 + 17y + 13 = 0$$

$$a = 4; b = 17; c = 13$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 4 \cdot 13}}{2 \cdot 4} = \frac{-17 \pm \sqrt{81}}{8} = \frac{-17 \pm 9}{8}$$

$$y_1 = \frac{-17 + 9}{8} = \frac{-8}{8} = -1 \quad y_2 = \frac{-17 - 9}{8} = \frac{-26}{8} = -\frac{13}{4} \quad K = \left\{ -\frac{13}{4}; -1 \right\}$$

Pedagogická poznámka: Největší problémy jsou s umocňováním závorek a znamínky před nimi. V bodě b) se pak stává, že žáci poté, co zjistí, že z rovnice zmizel kvadratický člen, prohlásí rovnici za neřešitelnou.

Př. 3: Vyřeš rovnice.

$$\text{a) } \frac{3y+5}{y+1} - \frac{3}{y} = 1$$

$$\text{b) } \frac{x}{x-2} + \frac{3}{x} = \frac{3x-2}{x^2-2x}$$

$$\text{c) } \frac{2b+1}{4b-6} + \frac{2b+5}{4b-2} = 2$$

$$\text{d) } \frac{2a-7}{3a} - \frac{2a+2}{a(a-1)} = \frac{-2a-1}{a^2-a}$$

$$\text{a) } \frac{3y+5}{y+1} - \frac{3}{y} = 1 \quad / \cdot (y+1)y$$

Podmínky: $y \neq 0$; $y \neq -1$.

$$y(3y+5) - 3(y+1) = y(y+1)$$

$$3y^2 + 5y - 3y - 3 = y^2 + y$$

$$3y^2 + 2y - 3 = y^2 + y \quad / -y^2 - y$$

$$2y^2 + y - 3 = 0$$

$$a = 2; b = 1; c = -3$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4}$$

$$y_1 = \frac{-1+5}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad y_2 = \frac{-1-5}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Oba nalezené kořeny vyhovují podmínkám $\Rightarrow K = \left\{ -\frac{3}{2}; 1 \right\}$.

$$\text{b) } \frac{x}{x-2} + \frac{3}{x} = \frac{3x-2}{x^2-2x} \quad / \cdot (x-2)x$$

Podmínky: $x \neq 0$; $x \neq 2$.

$$x^2 + 3(x-2) = 3x-2$$

$$x^2 + 3x - 6 = 3x - 2 \quad / -3x + 2$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x-2)(x+2) = 0 \quad x_1 = 2 \quad x_2 = -2$$

První kořen nevyhovuje podmínkám $\Rightarrow K = \{-2\}$.

$$\text{c) } \frac{2b+1}{4b-6} + \frac{2b+5}{4b-2} = 2$$

Podmínky: $4b-6 \neq 0 \Rightarrow a \neq \frac{3}{2}$, $4b-2 \neq 0 \Rightarrow b \neq \frac{1}{2}$

$$\frac{2b+1}{4b-6} + \frac{2b+5}{4b-2} = 2 \quad / \cdot 2$$

$$\frac{2b+1}{2b-3} + \frac{2b+5}{2b-1} = 4 \quad / \cdot (2b-3)(2b-1)$$

$$(2b+1)(2b-1) + (2b+5)(2b-3) = 4(2b-3)(2b-1)$$

$$4b^2 - 1 + 4b^2 - 6b + 10b - 15 = 4(4b^2 - 2b - 6b + 3)$$

$$8b^2 + 4b - 16 = 16b^2 - 32b + 12 \quad / -8b^2 - 4b + 16$$

$$0 = 8b^2 - 36b + 28 \quad /:4$$

$$2b^2 - 9b + 7 = 0$$

$$a = 2; b = -9; c = 7$$

$$b_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7}}{2 \cdot 2} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{9 \pm 5}{4}$$

$$b_1 = \frac{9+5}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} \quad b_2 = \frac{9-5}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Oba nalezené kořeny vyhovují podmínkám $\Rightarrow K = \left\{ -\frac{3}{2}; 1 \right\}$.

$$d) \frac{2a-7}{3a} - \frac{2a+2}{a(a-1)} = \frac{-2a-1}{a^2-a}$$

$$\frac{2a-7}{3a} - \frac{2a+2}{a(a-1)} = \frac{-2a-1}{a(a-1)} \quad / \cdot 3a(a-1)$$

Podmínky: $a \neq 0; 1$

$$(2a-7)(a-1) - 3(2a+2) = 3(-2a-1)$$

$$2a^2 - 2a - 7a + 7 - 6a - 6 = -6a - 3$$

$$2a^2 - 15a + 1 = -6a - 3 \quad / +6a + 3$$

$$2a^2 - 9a + 4 = 0$$

$$a = 2; b = -9; c = 4$$

$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{9 \pm 7}{4}$$

$$a_1 = \frac{9+7}{4} = \frac{16}{4} = 4 \quad a_2 = \frac{9-7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Oba nalezené kořeny vyhovují podmínkám $\Rightarrow K = \left\{ \frac{1}{2}; 4 \right\}$.

Př. 4: Vyřeš šílenosti.

$$a) (x+1)^2 - [5(x+1) - (x+3)(x+1) + 3] = (x+4)(3x+2)$$

$$b) 3(x+1) + 6(x+2)x - 5(2x+3) = 2(x+1)(2x+1) - 2(4x+7)$$

$$a) (x+1)^2 - [5(x+1) - (x+3)(x+1) + 3] = (x+4)(3x+2)$$

$$x^2 + 2x + 1 - [5x + 5 - (x^2 + x + 3x + 3) + 3] = 3x^2 + 2x + 12x + 8$$

$$x^2 + 2x + 1 - [5x + 5 - (x^2 + 4x + 3) + 3] = 3x^2 + 14x + 8$$

$$x^2 + 2x + 1 - (5x + 5 - x^2 - 4x - 3 + 3) = 3x^2 + 14x + 8$$

$$x^2 + 2x + 1 - (-x^2 + x + 5) = 3x^2 + 14x + 8$$

$$x^2 + 2x + 1 + x^2 - x - 5 = 3x^2 + 14x + 8$$

$$2x^2 + x - 4 = 3x^2 + 14x + 8 \quad / -2x^2 - x + 4$$

$$0 = x^2 + 13x + 12 = (x+12)(x+1) \quad K = \{-12; -1\}$$

$$\text{b) } 3(x+1) + 6(x+2)x - 5(2x+3) = 2(x+1)(2x+1) - 2(4x+7)$$

$$3x+3+6x^2+12x-10x-15 = 2(2x^2+x+2x+1) - 8x-14$$

$$6x^2+5x-12 = 4x^2+6x+2-8x-14$$

$$6x^2+5x-12 = 4x^2-2x-12 \quad / -4x^2+2x+12$$

$$2x^2+7x=0$$

$$x(2x+7)=0 \quad K = \left\{-\frac{7}{2}; 0\right\}$$

Př. 5: Zrekapituluj a uspořádej naše zkušenosti s řešením rovnic. Jaké typy rovnic umíme řešit? Jaké typy výsledků můžeme získat? Jak máme v různých situacích postupovat? Na co si musíme dávat pozor?

Řešení na začátku následující hodiny.

Shrnutí: Ne každá rovnice, která na začátku obsahuje x^2 je nutně kvadratická. Lineární rovnice řešíme tím, že členy s neznámou převedeme na jednu stranu, členy bez neznámé na druhou.