

4.2.9 Slovní úlohy

Předpoklady: 040208

Př. 1: Zrekapituluj a uspořádej naše zkušenosti s řešením rovnic. Jaké typy rovnic umíme řešit? Jaké typy výsledků můžeme získat? Jak máme v různých situacích postupovat? Na co si musíme dávat pozor?

Přehled řešení rovnic

Nejdříve rovnici zjednodušíme:

- odstranění závorek \Rightarrow pozor na:
 - $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$,
 - roznásobování i znaménko před závorkou se týká všech členů uvnitř:
 $-3 \cdot (2x - 3) = -6x + 9$,
- odstranění zlomků \Rightarrow
 - násobíme nejmenším společným násobkem:
 $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x^2+x} \quad / \cdot (x+1) \cdot x$,
 - násobíme všechny členy v rovnici:
 $2x + \frac{3-x}{2} = \frac{1}{x} \quad / \cdot 2x$,
 $4x^2 + x(3-x) = 2$
 - součin násobíme jen jednou:
 $2 \cdot \frac{x}{3} + 1 = \frac{3}{2} \quad / \cdot 6$
 $6 \cdot 2 \cdot \frac{x}{3} + 6 = 6 \cdot \frac{3}{2}$,
 $4x + 6 = 9$
- ekvivalentní úpravy \Rightarrow k oběma stranám rovnice
 - přičíst nebo odečíst libovolné číslo nebo výraz,
 - vynásobit nebo vydělit nenulovým číslem nebo výrazem, který se nesmí rovnat nule,
 - pokud je výraz nulový můžeme ztratit nebo „vyrobit“ řešení:
 $x(x+1) = 3x \quad / : x \Rightarrow$ ztratili jsme řešení rovnice $x = 0$.
 $x+1 = 3$

Po zjednodušování záleží na mocninách neznámé, které v rovnici zůstanou:

- nejvyšší mocnina je třetí nebo vyšší \Rightarrow všechny členy na jednu stranu (na druhé nula) a zkusit rozložit,
 - pokud rozklad provedeme = součinnový tvar \Rightarrow každý člen součinu se rovná nule \Rightarrow jednotlivé kořeny,
 - pokud se to nepovede, nevíme co dál
- nejvyšší mocnina je druhá \Rightarrow kvadratická rovnice \Rightarrow všechny členy na jednu stranu (na druhé nula):
 - pokud jde rozložit (vytknutí nebo hledání dvou čísel do dvou závorek) \Rightarrow součinnový tvar

- tvar $x^2 + \text{kladné číslo} = 0 \Rightarrow$ žádné řešení (x^2 nemůže být záporné)
- jinak vzorec $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow$
 - $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ dvě řešení,
 - $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ jedno řešení,
 - $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ žádné řešení.
- nejvyšší mocnina je první \Rightarrow lineární rovnice \Rightarrow všechny členy s x jednu stranu, všechny členy bez x na druhou, vytknout x :
 - $ax = b \Rightarrow$ jedno řešení $x = \frac{b}{a}$,
 - $0x = 0 \Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení,
 - $+x = b \neq 0 \Rightarrow$ žádné řešení.

Př. 2: Osobní automobil se pohybuje rychlostí v km/h. Zapiš rychlost, kterou pohybuje:

- a) nákladní automobil, který je o 20 km/h pomalejší,
- b) cyklista, který je třikrát pomalejší,
- c) rychlík, který je o čtvrtinu rychlejší,
- d) sportovní motocykl, který je o 15 % rychlejší.

a) nákladní automobil, který je o 20 km/h pomalejší $\Rightarrow v_n = v - 20$

b) cyklista, který je třikrát pomalejší $\Rightarrow v_c = \frac{1}{3}v$

c) rychlík, který je o čtvrtinu rychlejší $\Rightarrow v_r = v - \frac{1}{4}v = \frac{3}{4}v$,

d) sportovní motocykl, který je o 15 % rychlejší $\Rightarrow v_c = v + \frac{15}{100}v = \frac{115}{100}v = 1,15v$

Př. 3: Urči, jaké číslo musíme odečíst od čitatele i jmenovatele zlomku $\frac{5}{4}$, abychom získali

zlomek $\frac{4}{5}$.

Sledujeme zadání:

původní číslo: $\frac{5}{4}$,

od čitatele i jmenovatele odečteme neznámé číslo: $\frac{5-x}{4-x}$,

získáme zlomek $\frac{4}{5} : \frac{5-x}{4-x} = \frac{4}{5} \Rightarrow$ máme rovnici k řešení.

$$\frac{5-x}{4-x} = \frac{4}{5} \quad / \cdot 5(4-x)$$

$$5(5-x) = 4(4-x)$$

$$25 - 5x = 16 - 4x \quad / +5x - 16$$

$$9 = x$$

Od čitatele i jmenovatele zlomku $\frac{5}{4}$ musíme odečíst číslo 9, abychom získali zlomek $\frac{4}{5}$.

Př. 4: Původně byl poměr mezi ženami a muži zaměstnanými na úřadě 2:5 v neprospěch mužů. Kvůli snížení genderové nerovnováhy se vedení úřadu rozhodlo, že v budoucnu bude přijímat vždy pouze stejný počet mužů i žen. Po rozšíření pravomocí tak úřad přijal 24 nových úředníků, čímž se poměr zlepšil na 5:8 v neprospěch mužů. Kolik úředníků nyní v úřadě pracuje?

Zkusíme ze změny poměrů určit původní počet mužů a žen.

Původní počet mužů ... $2x$ (abychom mohli zapsat počet žen a dodržet poměr)

Konečný počet mužů ... $2x + 12$ (mezi 24 novými úředníky byla polovina mužů)

Původní počet žen ... $5x$ (poměr mužů a žen byl 2:5)

Konečný počet žen ... $5x + 12$ (mezi 24 novými úředníky byla polovina žen)

Konečný poměr muži a ženy ... $\frac{2x+12}{5x+12} = \frac{5}{8}$ - máme rovnici k řešení.

$$\frac{2x+12}{5x+12} = \frac{5}{8} \quad / \cdot 8(5x+12)$$

$$8(2x+12) = 5(5x+12)$$

$$16x+96 = 25x+60 \quad / -16x-60$$

$$36 = 9x \quad / :9$$

$$x = 4$$

Původní počet mužů: $2x = 8$, původní počet žen: $5x = 20 \Rightarrow$ původní počet pracovníků $8 + 20 = 28$.

Konečný počet pracovníků: $28 + 24 = 52$.

Na úřadě pracuje 52 pracovníků.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je BONUS pro domácí příkladu olympioniků.

Př. 5: Jak by vypadalo řešení příkladu 7, kdybychom chtěli z obecného zlomku $\frac{a}{b}$

odečtením čísla x od čitatele i jmenovatele, získat zlomek $\frac{b}{a}$. Čemu by se muselo rovnat číslo x ? Zkus vyřešit algebraicky i úvahou bez výpočtu.

Pokusíme se číslo x vypočítat: $\frac{a-x}{b-x} = \frac{b}{a} \quad / \cdot a(b-x)$

$$a(a-x) = b(b-x)$$

$$a^2 - ax = b^2 - bx \quad / -a^2 + bx$$

$$bx - ax = b^2 - a^2$$

$$x(b-a) = b^2 - a^2 \quad / : (b-a)$$

$$x = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(b - a)(b + a)}{b - a} = b + a$$

Od čitatele i jmenovatele obecného zlomku $\frac{a}{b}$ musíme odečíst číslo $b + a$, abychom získali zlomek $\frac{b}{a}$ (za podmínek $a \neq 0$; $b \neq 0$; $a \neq b$).

Úvaha: Zlomek $\frac{a}{b}$ musíme přeměnit na zlomek $\frac{b}{a}$. Pokud odečteme:

- od čitatele číslo a , získáme nulu, pokud dále odečteme číslo b , získáme číslo $-b$,
- od jmenovatele číslo b , získáme nulu, pokud dále odečteme číslo a , získáme číslo $-a$,

\Rightarrow získáme zlomek $\frac{-b}{-a} = \frac{b}{a}$.

Od čitatele i jmenovatele obecného zlomku $\frac{a}{b}$ musíme odečíst číslo $b + a$, abychom získali zlomek $\frac{b}{a}$.

Shrnutí: