

4.2.9 Slovní úlohy

Předpoklady: 040208

Př. 1: Zrekapituluj a uspořádej naše zkušenosti s řešením rovnic. Jaké typy rovnic umíme řešit? Jaké typy výsledků můžeme získat? Jak máme v různých situacích postupovat? Na co si musíme dávat pozor?

Přehled řešení rovnic

Nejdříve rovnici zjednodušíme:

- odstranění závorek \Rightarrow pozor na:
 - $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$,
 - roznásobování i znaménko před závorkou se týká všech členů uvnitř:
 $-3 \cdot (2x - 3) = -6x + 9$,
- odstranění zlomků \Rightarrow
 - násobíme nejmenším společným násobkem:
 $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x^2+x} \quad / \cdot (x+1) \cdot x$,
 - násobíme všechny členy v rovnici:
 $2x + \frac{3-x}{2} = \frac{1}{x} \quad / \cdot 2x$,
 $4x^2 + x(3-x) = 2$
 - součin násobíme jen jednou:
 $2 \cdot \frac{x}{3} + 1 = \frac{3}{2} \quad / \cdot 6$
 $6 \cdot 2 \cdot \frac{x}{3} + 6 = 6 \cdot \frac{3}{2}$,
 $4x + 6 = 9$
- ekvivalentní úpravy \Rightarrow k oběma stranám rovnice
 - přičíst nebo odečíst libovolné číslo nebo výraz,
 - vynásobit nebo vydělit nenulovým číslem nebo výrazem, který se nesmí rovnat nule,
 - pokud je výraz nulový můžeme ztratit nebo „vyrobit“ řešení:
 $x(x+1) = 3x \quad / : x \Rightarrow$ ztratili jsme řešení rovnice $x = 0$.
 $x+1 = 3$

Po zjednodušování záleží na mocninách neznámé, které v rovnici zůstanou:

- nejvyšší mocnina je třetí nebo vyšší \Rightarrow všechny členy na jednu stranu (na druhé nula) a zkusit rozložit,
 - pokud rozklad provedeme = součinnový tvar \Rightarrow každý člen součinu se rovná nule \Rightarrow jednotlivé kořeny,
 - pokud se to nepovede, nevíme co dál
- nejvyšší mocnina je druhá \Rightarrow kvadratická rovnice \Rightarrow všechny členy na jednu stranu (na druhé nula):
 - pokud jde rozložit (vytknutí nebo hledání dvou čísel do dvou závorek) \Rightarrow součinnový tvar

- tvar $x^2 + \text{kladné číslo} = 0 \Rightarrow$ žádné řešení (x^2 nemůže být záporné)
- jinak vzorec $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow$
 - $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ dvě řešení,
 - $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ jedno řešení,
 - $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ žádné řešení.
- nejvyšší mocnina je první \Rightarrow lineární rovnice \Rightarrow všechny členy s x na jednu stranu, všechny členy bez x na druhou, vytknout x :
 - $ax = b \Rightarrow$ jedno řešení $x = \frac{b}{a}$,
 - $0x = 0 \Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení,
 - $+x = b \neq 0 \Rightarrow$ žádné řešení.

Př. 2: Osobní automobil se pohybuje rychlostí v km/h. Zapiš rychlost, kterou se pohybuje:

- a) nákladní automobil, který je o 20 km/h pomalejší,
- b) cyklista, který je třikrát pomalejší,
- c) rychlík, který je o čtvrtinu rychlejší,
- d) sportovní motocykl, který je o 15 % rychlejší.

a) nákladní automobil, který je o 20 km/h pomalejší $\Rightarrow v_n = v - 20$

b) cyklista, který je třikrát pomalejší $\Rightarrow v_c = \frac{1}{3}v$

c) rychlík, který je o čtvrtinu rychlejší $\Rightarrow v_r = v + \frac{1}{4}v = \frac{5}{4}v$,

d) sportovní motocykl, který je o 15 % rychlejší $\Rightarrow v_c = v + \frac{15}{100}v = \frac{115}{100}v = 1,15v$

Př. 3: Janička, tatínek i babička mají narozeniny ve stejný den. Janičce je j let, tatínek je t krát starší než Janička, babička je o b let starší než tatínek. Zapiš výrazem:

- a) kolik je všem třem dohromady,
- b) kolikrát je babička starší než Janička,
- c) o kolik let je Janička mladší než tatínek,
- d) kolik bylo babičce, když se Janička narodila.

Nejdříve si zapíšeme kolik je každému let:

- Janička ... j ,
- tatínek je t krát starší než Janička ... tj ,
- babička je o b let starší než tatínek ... $tj + b$.

a) kolik je všem třem dohromady

$$j + tj + tj + b = 2tj + j + b = j(2t + 1) + b$$

b) kolikrát je babička starší než Janička

$$\frac{tj+b}{j}$$

c) o kolik let je Janička mladší než tatínek

$$tj - j = j(t-1)$$

d) kolik bylo babičce, když se Janička narodila.

$$tj + b - j = j(t-1) + b$$

Př. 4: k čerpadel naplní nádrž za m minut. Zapiš výrazem za kolik minut naplní:

- 1 nádrž 3 čerpadla,
- 2 nádrže 1 čerpadlo,
- k nádrží m čerpadel.

a) 1 nádrž 3 čerpadla

k čerpadel	...	1 nádrž	...	m minut
1 čerpadlo	...	1 nádrž	...	mk minut
3 čerpadla	...	1 nádrž	...	$\frac{mk}{3}$

b) 2 nádrže 1 čerpadlo,

1 čerpadlo	...	1 nádrž	...	mk minut
1 čerpadlo	...	2 nádrže	...	$2mk$ minut

c) k nádrží m čerpadel

1 čerpadlo	...	1 nádrž	...	mk minut
1 čerpadlo	...	k nádrží	...	$mk \cdot k = mk^2$ minut
m čerpadel	...	k nádrží	...	$\frac{mk^2}{m} = k^2$ minut

Př. 5: Urči, jaké číslo musíme odečíst od čitatele i jmenovatele zlomku $\frac{5}{4}$, abychom získali

$$\text{zlomek } \frac{4}{5}.$$

Sledujeme zadání:

$$\text{původní číslo: } \frac{5}{4},$$

$$\text{od čitatele i jmenovatele odečteme neznámé číslo: } \frac{5-x}{4-x},$$

$$\text{získáme zlomek } \frac{4}{5} : \frac{5-x}{4-x} = \frac{4}{5} \Rightarrow \text{máme rovnici k řešení.}$$

$$\frac{5-x}{4-x} = \frac{4}{5} \quad / \cdot 5(4-x)$$

$$5(5-x) = 4(4-x)$$

$$25 - 5x = 16 - 4x \quad / +5x - 16$$

$$9 = x$$

Od čitatele i jmenovatele zlomku $\frac{5}{4}$ musíme odečíst číslo 9, abychom získali zlomek $\frac{4}{5}$.

Př. 6: Původně byl poměr mezi ženami a muži zaměstnanými na úřadě 2:5 v neprospěch mužů. Kvůli snížení genderové nerovnováhy se vedení úřadu rozhodlo, že v budoucnu bude přijímat vždy pouze stejný počet mužů i žen. Po rozšíření pravomocí tak úřad přijal 24 nových úředníků, čímž se poměr zlepšil na 5:8 v neprospěch mužů. Kolik úředníků nyní v úřadě pracuje?

Zkusíme ze změny poměrů určit původní počet mužů a žen.

Původní počet mužů ... $2x$ (abychom mohli zapsat počet žen a dodržet poměr)
Konečný počet mužů ... $2x+12$ (mezi 24 novými úředníky byla polovina mužů)
Původní počet žen ... $5x$ (poměr mužů a žen byl 2:5)
Konečný počet žen ... $5x+12$ (mezi 24 novými úředníky byla polovina žen)
Konečný poměr muži a ženy ... $\frac{2x+12}{5x+12} = \frac{5}{8}$ - máme rovnici k řešení.

$$\frac{2x+12}{5x+12} = \frac{5}{8} \quad / \cdot 8(5x+12)$$

$$8(2x+12) = 5(5x+12)$$

$$16x+96 = 25x+60 \quad / -16x-60$$

$$36 = 9x \quad / :9$$

$$x = 4$$

Původní počet mužů: $2x = 8$, původní počet žen: $5x = 20 \Rightarrow$ původní počet pracovníků $8+20 = 28$.

Konečný počet pracovníků: $28+24 = 52$.

Na úřadě pracuje 52 pracovníků.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je BONUS pro domácí přípravu olympioniků.

Př. 7: Jak by vypadalo řešení příkladu 5, kdybychom chtěli z obecného zlomku $\frac{a}{b}$ odečtením čísla x od čitatele i jmenovatele, získat zlomek $\frac{b}{a}$. Čemu by se muselo rovnat číslo x ? Zkus vyřešit algebraicky i úvahou bez výpočtu.

Pokusíme se číslo x vypočítat: $\frac{a-x}{b-x} = \frac{b}{a} \quad / \cdot a(b-x)$

$$a(a-x) = b(b-x)$$

$$a^2 - ax = b^2 - bx \quad / -a^2 + bx$$

$$bx - ax = b^2 - a^2$$

$$x(b-a) = b^2 - a^2 \quad / : (b-a)$$

$$x = \frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{(b-a)(b+a)}{b-a} = b+a$$

Od čitatele i jmenovatele obecného zlomku $\frac{a}{b}$ musíme odečíst číslo $b + a$, abychom získali zlomek $\frac{b}{a}$ (za podmínek $a \neq 0; b \neq 0; a \neq b$).

Úvaha: Zlomek $\frac{a}{b}$ musíme přeměnit na zlomek $\frac{b}{a}$. Pokud odečteme:

- od čitatele číslo a , získáme nulu, pokud dále odečteme číslo b , získáme číslo $-b$,
- od jmenovatele číslo b , získáme nulu, pokud dále odečteme číslo a , získáme číslo $-a$,

\Rightarrow získáme zlomek $\frac{-b}{-a} = \frac{b}{a}$.

Od čitatele i jmenovatele obecného zlomku $\frac{a}{b}$ musíme odečíst číslo $b + a$, abychom získali zlomek $\frac{b}{a}$.

Shrnutí: