4.2.9 Slovní úlohy

Předpoklady: 040208

Př. 1: Zrekapituluj a uspořádej naše zkušenosti s řešením rovnic. Jaké typy rovnic umíme řešit? Jaké typy výsledků můžeme získat? Jak máme v různých situacích postupovat? Na co si musíme dávat pozor?

Přehled řešení rovnic
Nejdříve rovnici zjednodušíme:

- odstranění závorek $\Rightarrow$ pozor na:
    - $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$,
    - roznásobování i znaménko před závorkou se týká všech členů uvnitř: $-3 \cdot (2x-3) = -6x+9$,
- odstranění zlomků $\Rightarrow$
    - násobíme nejmenším společným násobkem: $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x^2+x} \quad / \cdot (x+1) \cdot x$,
    - násobíme všechny členy v rovnici: $$\begin{aligned} 2x + \frac{3-x}{2} &= \frac{1}{x} \quad / \cdot 2x \\ 4x^2 + x(3-x) &= 2 \end{aligned},$$
    - součin násobíme jen jednou: $$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{x}{3} + 1 &= \frac{3}{2} \quad / \cdot 6 \\ 6 \cdot 2 \cdot \frac{x}{3} + 6 &= 6 \cdot \frac{3}{2} \\ 4x + 6 &= 9 \end{aligned},$$
- ekvivalentní úpravy $\Rightarrow$ k oběma stranám rovnice
    - přičíst nebo odečíst libovolné číslo nebo výraz,
    - vynásobit nebo vydělit nenulovým číslem nebo výrazem, který se nesmí rovnat nule,
    - pokud je výraz nulový můžeme ztratit nebo „vyrobit“ řešení: $$\begin{aligned} x(x+1) &= 3x \quad / : x \\ x+1 &= 3 \end{aligned}$$ $\Rightarrow$ ztratili jsme řešení rovnice $x = 0$.

Po zjednodušování záleží na mocninách neznámé, které v rovnici zůstanou:

- nejvyšší mocnina je třetí nebo vyšší $\Rightarrow$ všechny členy na jednu stranu (na druhé nula) a zkusit rozložit,
    - pokud rozklad provedeme = součinový tvar $\Rightarrow$ každý člen součinu se rovná nule $\Rightarrow$ jednotlivé kořeny,
    - pokud se to nepovede, nevíme co dál
- nejvyšší mocnina je druhá $\Rightarrow$ kvadratická rovnice $\Rightarrow$ všechny členy na jednu stranu (na druhé nula):
    - pokud jde rozložit (vytknutí nebo hledání dvou čísel do dvou závorek) $\Rightarrow$ součinový tvar

- tvar $x^2 + kladné\ číslo = 0 \Rightarrow$ žádné řešení (x^2 nemůže být záporné)
- jinak vzorec $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow$
  - $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ dvě řešení,
  - $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ jedno řešení,
  - $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ žádné řešení.

- nejvyšší mocnina je první $\Rightarrow$ lineární rovnice $\Rightarrow$ všechny členy s *x* jednu stranu, všechny členy bez *x* na druhou, vytknout *x*:
  - $ax = b \Rightarrow$ jedno řešení $x = \frac{b}{a}$,
  - $0x = 0 \Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení,
  - $+x = b \neq 0 \Rightarrow$ žádné řešení.

Př. 2: Osobní automobil se pohybuje rychlostí *v* km/h. Zapiš rychlost, kterou pohybuje:
a) nákladní automobil, který je o 20 km/h pomalejší,
b) cyklista, který je třikrát pomalejší,
c) rychlík, který je o čtvrtinu rychlejší,
d) sportovní motocykl, který je o 15 % rychlejší.

a) nákladní automobil, který je o 20 km/h pomalejší $\Rightarrow$ $v_n = v - 20$

b) cyklista, který je třikrát pomalejší $\Rightarrow$ $v_c = \frac{1}{3}v$

c) rychlík, který je o čtvrtinu rychlejší $\Rightarrow$ $v_r = v + \frac{1}{4}v = \frac{5}{4}v$,

d) sportovní motocykl, který je o 15 % rychlejší $\Rightarrow$ $v_c = v + \frac{15}{100}v = \frac{115}{100}v = 1{,}15v$

Př. 3: Janička, tatínek i babička mají narozeniny ve stejný den. Janičce je *j* let, tatínek je *t* krát starší než Janička, babička je o *b* let starší než tatínek. Zapiš výrazem:
a) kolik je všem třem dohromady,
b) kolikrát je babička starší než Janička,
c) o kolik let je Janička mladší než tatínek,
d) kolik bylo babičce, když se Janička narodila.

Nejdříve si zapíšeme kolik je každému let:

- Janička … j,
- tatínek je *t* krát starší než Janička … tj,
- babička je o *b* let starší než tatínek … $tj + b$.

a) kolik je všem třem dohromady
$j + tj + tj + b = 2tj + j + b = j(2t + 1) + b$

b) kolikrát je babička starší než Janička

$\frac{tj+b}{j}$

c) o kolik let je Janička mladší než tatínek

$tj - j = j(t-1)$

d) kolik bylo babičce, když se Janička narodila.

$tj + b - j = j(t-1) + b$

Př. 4: *k* čerpadel naplní nádrž za *m* minut. Zapiš výrazem za kolik minut naplní:
a) 1 nádrž 3 čerpadla,
b) 2 nádrže 1 čerpadlo,
c) *k* nádrží *m* čerpadel.

a) 1 nádrž 3 čerpadla

k čerpadel	…	1 nádrž	…	*m* minut
1 čerpadlo	…	1 nádrž	…	mk minut
3 čerpadla	…	1 nádrž	…	$\frac{mk}{3}$

b) 2 nádrže 1 čerpadlo,

1 čerpadlo	…	1 nádrž	…	mk minut
1 čerpadlo	…	2 nádrže	…	$2mk$ minut

c) *k* nádrží *m* čerpadel

1 čerpadlo	…	1 nádrž	…	mk minut
1 čerpadlo	…	*k* nádrží	…	$mk \cdot k = mk^2$ minut
m čerpadel	…	*k* nádrží	…	$\frac{mk^2}{m} = k^2$ minut

Př. 5: Urči, jaké číslo musíme odečíst od čitatele i jmenovatele zlomku $\frac{5}{4}$, abychom získali zlomek $\frac{4}{5}$.

Sledujeme zadání:

původní číslo: $\frac{5}{4}$,

od čitatele i jmenovatele odečteme neznámé číslo: $\frac{5-x}{4-x}$,

získáme zlomek $\frac{4}{5}$: $\frac{5-x}{4-x} = \frac{4}{5}$ $\Rightarrow$ máme rovnici k řešení.

$\frac{5-x}{4-x} = \frac{4}{5} \qquad / \cdot 5(4-x)$

$5(5-x) = 4(4-x)$

$25 - 5x = 16 - 4x \qquad / +5x - 16$

$9 = x$

Od čitatele i jmenovatele zlomku $\frac{5}{4}$ musíme odečíst číslo 9, abychom získali zlomek $\frac{4}{5}$.

Př. 6: Původně byl poměr mezi ženami a muži zaměstnanými na úřadě 2:5 v neprospěch mužů. Kvůli snížení genderové nerovnováhy se vedení úřadu rozhodlo, že v budoucnu bude přijímat vždy pouze stejný počet mužů i žen. Po rozšíření pravomocí tak úřad přijal 24 nových úředníků, čímž se poměr zlepšil na 5:8 v neprospěch mužů. Kolik úředníků nyní v úřadě pracuje?

Zkusíme ze změny poměrů určit původní počet mužů a žen.
Původní počet mužů ... $2x$ (abychom mohli zapsat počet žen a dodržet poměr)
Konečný počet mužů ... $2x+12$ (mezi 24 novými úředníky byla polovina mužů)
Původní počet žen ... $5x$ (poměr mužů a žen byl 2:5)
Konečný počet žen ... $5x+12$ (mezi 24 novými úředníky byla polovina žen)
Konečný poměr muži a ženy ... $\frac{2x+12}{5x+12} = \frac{5}{8}$ - máme rovnici k řešení.

$$\frac{2x+12}{5x+12} = \frac{5}{8} \qquad / \cdot 8(5x+12)$$

$$8(2x+12) = 5(5x+12)$$

$$16x + 96 = 25x + 60 \qquad / -16x - 60$$

$$36 = 9x \qquad / : 9$$

$$x = 4$$

Původní počet mužů: $2x = 8$, původní počet žen: $5x = 20$ $\Rightarrow$ původní počet pracovníků $8 + 20 = 28$.
Konečný počet pracovníků: $28 + 24 = 52$.
Na úřadě pracuje 52 pracovníků.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je BONUS pro domácí příkladu olympioniků.

Př. 7: Jak by vypadalo řešení příkladu 5, kdybychom chtěli z obecného zlomku $\frac{a}{b}$ odečtením čísla x od čitatele i jmenovatele, získat zlomek $\frac{b}{a}$. Čemu by se muselo rovnat číslo x? Zkus vyřešit algebraicky i úvahou bez výpočtu.

Pokusíme se číslo x vypočítat: $\frac{a-x}{b-x} = \frac{b}{a} \qquad / \cdot a(b-x)$

$$a(a-x) = b(b-x)$$

$$a^2 - ax = b^2 - bx \qquad / -a^2 + bx$$

$$bx - ax = b^2 - a^2$$

$$x(b-a) = b^2 - a^2 \qquad / : (b-a)$$

$$x = \frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{(b-a)(b+a)}{b-a} = b + a$$

Od čitatele i jmenovatele obecného zlomku $\frac{a}{b}$ musíme odečíst číslo $b+a$, abychom získali zlomek $\frac{b}{a}$ (za podmínek $a \neq 0; b \neq 0; a \neq b$).

Úvaha: Zlomek $\frac{a}{b}$ musíme přeměnit na zlomek $\frac{b}{a}$. Pokud odečteme:

- od čitatele číslo *a*, získáme nulu, pokud dále odečteme číslo *b*, získáme číslo $-b$,
- od jmenovatele číslo *b*, získáme nulu, pokud dále odečteme číslo *a*, získáme číslo $-a$,

$\Rightarrow$ získáme zlomek $\frac{-b}{-a} = \frac{b}{a}$.

Od čitatele i jmenovatele obecného zlomku $\frac{a}{b}$ musíme odečíst číslo $b+a$, abychom získali zlomek $\frac{b}{a}$.

Shrnutí: