4.2.10 Slovní úlohy vedoucí na kvadratické rovnice

Předpoklady: 040209

S druhou mocninou souvisí plochy, proto se mnoho slovních úloh vedoucích na kvadratické rovnice týká ploch.

Př. 1: Obdélníková garáž má plochu $24\ \text{m}^2$, jedna její strana je o 2 m delší než druhá. Urči rozměry garáže.

Označíme si délky stran:
první strana ... x
druhá stran ... $x+2$ (je o 2 m delší)
Plocha $S = ab = x(x+2) = 24 \Rightarrow$ získali jsme rovnici $x(x+2) = 24$.

$x^2 + 2x = 24 \quad / -24$

$x^2 + 2x - 24 = 0$

$(x+6)(x-4) = 0 \Rightarrow$ rovnice má dvě řešení $x_1 = -6$ (zřejmě nemá reálný význam), $x_2 = 4\ \text{m}$

$\Rightarrow$ délka druhé strany $x + 2 = 6\ \text{m}$

Garáž má rozměry 4 m x 6m.

Př. 2: Obdélníkový pozemek má jednu stranu o polovinu delší než druhou. Urči jeho rozměry, jestliže má plochu $96\ \text{a}$.

První strana ... x
Druhá strana ... $1,5x$ (o polovinu delší než první strana)
Plocha pozemku ... $96\ \text{a} = 9600\ \text{m}^2$

$S = ab = x \cdot 11,5x = 9600$

$1,5x^2 = 9600 \quad / \cdot 2$

$3x^2 = 19\,200 \quad / : 3$

$x^2 = 6\,400$

$x_1 = \sqrt{6400}\ \text{m} = 80\ \text{m}$ $\qquad x_2 = -\sqrt{6400}\ \text{m} = -80\ \text{m}$ v realitě nemá význam.

Druhá strana: $1,5x = 1,5 \cdot 80\ \text{m} = 120\ \text{m}$.

Obdélníkový pozemek má rozměry 80 m x 120 m.

Př. 3: Jedna ze základen lichoběžníku je pětinu větší než jeho výška, druhá je větší o 1 cm. Urči rozměry lichoběžníku, pokud je jeho plocha $115\ \text{cm}^2$.

Velikost výšky ... v

První základna ... $v + \frac{1}{5}v = \frac{6}{5}v$

Druhá základna ... $v + 1$

Obsah lichoběžníku: $S=\frac{(a+c)v}{2}=\frac{\left(\frac{6}{5}v+v+1\right)v}{2}=115 \quad / \cdot 2$

$\left(\frac{11}{5}v+1\right)v=230$

$\frac{11}{5}v^2+v=230 \quad / -230$

$\frac{11}{5}v^2+v-230=0 \quad / \cdot 5$

$11v^2+5v-1150=0$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 11\cdot(-1150)}}{2\cdot 11}=\frac{-5\pm\sqrt{50\,625}}{22}=\frac{-5\pm 225}{22}$

$x_1=\frac{-5+225}{22}=\frac{220}{22}=10 \qquad x_2=\frac{-5-225}{22}=-\frac{230}{22}=-\frac{115}{11}$

Rozměry lichoběžníku jsou $a=12$ cm, $c=11$ cm, $v=10$ cm.

Př. 4: Pravoúhlý trojúhelník má obvod 24 cm a přeponu o délce 10 cm. Urči délku jeho odvěsen.

Zapíšeme délky stran:
přepona ... 10 cm
1. odvěsna ... x
2. odvěsna ... $24-10-x=14-x$.

Trojúhelník je pravoúhlý $\Rightarrow$ pro délky stran platí Pythagorova věta $a^2+b^2=c^2$.
Dosadíme: $x^2+(14-x)^2=10^2$

$x^2+196-28x+x^2=100 \quad / -100$

$2x^2-28x+96=0 \quad / :2$

$x^2-14x+48=0$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-14)\pm\sqrt{(-14)^2-4\cdot 1\cdot 48}}{2\cdot 1}=\frac{14\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{14\pm 2}{2}$

$x_1=\frac{14+2}{2}=\frac{16}{2}=8 \Rightarrow$ druhá strana: $14-x=14-8$ cm $=6$ cm.

$x_2=\frac{14-2}{2}=\frac{12}{2}=6 \Rightarrow$ druhá strana: $14-x=14-6$ cm $=8$ cm.

Odvěsna trojúhelníka mají délky stran 8 cm a 6 cm,

Dodatek: Při řešení předchozího příkladu jsme nerozlišovali větší a menší stranu, proto nám vyšly obě varianty už z kvadratické rovnice.

Př. 5: Když jsme poloměr kruhu zvětšili o 2 cm, zvětšil se jeho obsah o 40π cm^2. Urči poloměr kruhu před zvětšením.

Původní kruh: poloměr r … obsah $S=\pi r^2$
Zvětšený kruh: poloměr $r+2$ … obsah $S_v=\pi(r+2)^2$
Obsah kruhu se zvětšil o 40π … $S_v=S+40\pi$

$\pi(r+2)^2=\pi r^2+40\pi$

$\pi(r^2+4r+4)=\pi r^2+40\pi$

$\pi r^2+4r\pi+4\pi=\pi r^2+40\pi \quad / -\pi r^2-4\pi$

$4r\pi=36\pi \quad / :4\pi$

$r=\dfrac{36\pi}{4\pi}=9$ cm

Poloměr kruhu před zvětšením byl 9 cm.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad záměrně nevede na kvadratickou rovnici. Jde v něm i o pro žáky nezvyklé počítání s násobky π.

Př. 6: Cena pamětí do počítače během roku dvakrát klesla o stejné procento tak, že se z 5200 Kč snížila na 3757 Kč. O kolik procent se cena snižovala?

Původní cena … 5200
Cena po snížení o x % … $5200(1-x)$
Cena pro druhém snížení … $5200(1-x)^2=3757$

$5200(1-x)^2=3757 \quad / :5200$

$(1-x)^2=07225 \quad / \sqrt{\ }$ (víme, že obě strany jsou kladné číslo)

$1-x=0,85 \quad / +x-0,85$

$0,15=x$

Cena byla dvakrát snížena o 15 %,

Dodatek: Příklad je také možné řešit substitucí: $5200(1-x)^2=3757$
$5200y^2=3757$, případně tím, že neurčujeme hodnotu o kolik procent se cena snížila, ale kolik procent původní ceny tvoří nová cena (tedy přímo číslo y).
Ve všech případech zabráníme roznásobení závorky v původní rovnici, které vede na dost obtížnou kvadratickou rovnici $5200x^2-104000x+1443=0$.

Př. 7: Cena 1 litru benzínu vzrostla během roku o tolik procent, kolik korun stál litr na začátku roku. Urči původní cenu benzínu, jestliže na konci roku stál 39 Kč.

Původní cena ... x Kč.

nová cena po zvýšení ceny o x procent ... $x\left(1+\frac{x}{100}\right)$.

Po zvýšení ceny stál benzín 39 Kč: $x\left(1+\frac{x}{100}\right)=39$

$$x\left(1+\frac{x}{100}\right)=39$$

$$x+\frac{x^2}{100}=39 \qquad /\cdot 100$$

$$100x+x^2=3900 \qquad /-3900$$

$$x^2+100x-3900=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-100\pm\sqrt{100^2-4\cdot 1\cdot(-3900)}}{2\cdot 1}=\frac{-100\pm\sqrt{25600}}{2}=\frac{-100\pm 160}{2}$$

$x_1=\frac{-100+160}{2}=\frac{60}{2}=30$ $\quad$ $x_2=\frac{-100-160}{2}=\frac{-260}{2}=-130 \Rightarrow$ nemá reálný význam.

Původní cena benzínu byla 30 Kč za litr.

Př. 8: Počet úhlopříček n-úhelníku je možné vypočítat podle jednoduchého vzorce. Zkus vzorec odvodit.

Řešení v následujícím příkladu.

Př. 9: Pokud se ti nepodařilo vzorec v předchozím příkladu odvodit, pokus se o to ještě jednou podle následující nápovědy.
1. Kolik má n-úhelník vrcholů?
2. Kolik úhlopříček jde z každého vrcholu?
3. Kolik úhlopříček má n-úhelník, když známe hodnoty podle předchozích dvou bodů? (POZOR: Kolikrát jsme každou úhlopříčku počítali?)

1. Kolik má n-úhelník vrcholů?
n-úhelník má n vrcholů.

2. Kolik úhlopříček jde z každého vrcholu?
Z každého vrcholu vychází $n-3$ úhlopříček (úhlopříčky nevychází do sousedních vrcholů a do vrcholu samotného).

3. Kolik úhlopříček má n-úhelník, když známe hodnoty podle předchozích dvou bodů? (POZOR: Kolikrát jsme každou úhlopříčku počítali?)
Z každého z n bodů vychází $(n-3)$ úhlopříček $\Rightarrow$ celkem jde o $n(n-3)$ úhlopříček, ale každou jsme započítali dvakrát (z obou krajních bodů) $\Rightarrow$ úhlopříček je ve skutečnosti jen polovina $\Rightarrow$ n-úhelník má $\frac{n(n-3)}{2}$ úhlopříček.

Př. 10: Počet *k* úhlopříček *n*-úhelníku je dán vzorcem $k=\frac{n(n-3)}{2}$ Kolik vrcholů má *n*-úhelník se 44 úhlopříčkami?

Známe vzorec i počet úhlopříček $\Rightarrow$ $\frac{n(n-3)}{2}=44$ - rovnice k řešení.

$$\frac{n(n-3)}{2}=44 \qquad /\cdot 2$$

$$n^2-3n=88 \qquad /-88$$

$$n^2-3n-88=0$$

$$(n-11)\cdot(n+8)=0$$

$n_1=11$ $\qquad$ $n_2=-8$ - nemá reálný význam.

44 úhlopříček má jedenáctiúhelník.

Shrnutí: Slovní úlohy vedoucí na kvadratické rovnice se řeší úplně stejně jako jiné slovní úlohy.