4.2.12 Slovní úlohy o směsích II

Předpoklady: 040211

Pedagogická poznámka: Hodinu je nutné organizovat tak, aby se 15 minu před konce m hodiny začalo pracovat na posledních dvou příkladech na společnou práci. U prvního nemá cenu příliš dlouho čekat na žákovská řešení (v naprosté většině případů nejsou použitelná v komplikovanějších případech). Druhý už krokujeme.

Př. 1: Napiš hlavní myšlenku, ze které vychází při řešení příkladů o směsích.

Množství čisté látky (čistého ředidla) se smícháním nemění.

Př. 2: Sestav rovnice, pro řešení následujících příkladů. Rovnice neřeš.
a) Smícháme 3 litry 20 % roztoku a 2 litry 55 % roztoku. Urči koncentraci výsledného roztoku.
b) Kolik ml 90 % kyseliny musíme přidat do 55 ml 20 %, abychom získali roztok o koncentraci 35 %?
c) Smícháním 2 l roztoku o koncentraci 25 %, 1 l čisté vody a 1,5 l roztoku o neznámé koncentraci jsme získali roztok o koncentraci 15 %. Urči koncentraci neznámého roztoku.
d) Koncentrace alkoholu v 10 l kvasu klesla během destilace z 15 % na 3 %. Kolik lihu jsme vydestilovali?

a) Smícháme 3 litry 20 % roztoku a 2 litry 55 % roztoku. Urči koncentraci výsledného roztoku.
$3\cdot 0,2+2\cdot 0,55=(3+2)x$

b) Kolik ml 90 % kyseliny musíme přidat do 55 ml 20 %, abychom získali roztok o koncentraci 35 %?
$x\cdot 0,9+55\cdot 0,2=(x+55)0,35$

c) Smícháním 2 l roztoku o koncentraci 25 %, 1 l čisté vody a 1,5 l roztoku o neznámé koncentraci jsme získali roztok o koncentraci 15 %. Urči koncentraci neznámého roztoku.
$2\cdot 0,25+1,5\cdot x=(2+1+1,5)\cdot 0,15$

d) Koncentrace alkoholu v 10 l kvasu klesla během destilace z 15 % na 3 %. Kolik lihu jsme vydestilovali?
$10\cdot 0,15=(10-x)\cdot 0,03+x\cdot 1$

Př. 3: Smícháme 150 ml 0,9 % roztoku NaCl (fyziologický roztok) a 50 ml 5 % roztoku NaCl. Urči koncentraci výsledného roztoku NaCl. Vyřeš příklad tím, že budeš sledovat množství čisté vody.

150 ml	…	0,9 % NaCl	…	99,1 % vody
50 ml	…	5 % NaCl	…	95 % vody
$150+50$ ml	…	x % NaCl	…	y % vody

Sledujeme množství vody:

$150\cdot 0,991+50\cdot 0,95=(150+50)y \qquad /:200$

$$y=\frac{150\cdot 0,991+50\cdot 0,95}{200}=0,98075=98,075\ \%$$

Koncentrace soli: $100-98,075=1,925\ \%$

Získáme roztok o koncentraci $1,925\ \%$.

Pedagogická poznámka: Žáci většinou používají pro koncentraci vody i soli stejnou proměnnou *x*. Nebojuji proti tomu, pokud ví, co dělají. Sám používám pro koncentraci vody jinou proměnou, abych jasně odlišil, že jde o jinou věc.

Př. 4: Vymysli k následujícím rovnicím slovní zadání na míchání směsí.

a) $3\cdot 0,4+x\cdot 0,1=(3+x)\cdot 0,3$

b) $3\cdot x+2\cdot 0,62=5\cdot 0,39$

c) $0,3\cdot 0,4=(0,3+x)\cdot 0,21$

d) $5\cdot 0,2+x=(5+x)\cdot 0,75$

e) $3\cdot x+2\cdot 0,92=3\cdot 0,75$

a) $3\cdot 0,4+x\cdot 0,1=(3+x)\cdot 0,3$

Kolik litrů 10 % roztoku musíme smíchat s 3 litry 40 % roztoku, abychom získali 30 % roztok?

b) $3\cdot x+2\cdot 0,62=5\cdot 0,39$

Smícháním 3 litrů roztoku o neznámé koncentraci a 2 litrů roztoku o koncentraci 62 % jsme získali roztok o koncentraci 39 %. Urči koncentraci neznámého roztoku.

c) $0,3\cdot 0,4=(0,3+x)\cdot 0,21$

Kolik litrů čisté vody musíme přimíchat do 0,3 litru roztoku o koncentraci 40 %, abychom získali roztok o koncentraci 21 %?

d) $5\cdot 0,2+x=(5+x)\cdot 0,75$

Kolik litrů čistého lihu musíme přimíchat do 5 litrů roztoku o koncentraci 20 % abychom získali roztok o koncentraci 75 %?

e) $3\cdot x+2\cdot 0,92=3\cdot 0,75$

Předchozí rovnice nevyjadřuje smíchávání směsí. Čísla 0,2 a 0,3 by měla vyjadřovat množství směsí (vystupují na levé straně a na pravé je v závorce jejich součet) $\Rightarrow$ číslo 1,2 by mělo představovat koncentraci směsi, ale ta nemůže být větší než 1.

Př. 5: Zkušená úřednice zkontroluje dokumentaci projektu za 10 hodin, začínající k tomu potřebuje o pět hodin více. Za jak dlouho zkontrolují jeden projekt společně?

Nejednodušší typ příkladu na společnou práci, dá se řešit úsudkem. Sledujeme průběh kontroly:

Zkušená úřednice: celý projekt ... 10 hodin $\Rightarrow$ za 1 hodinu ... $\frac{1}{10}$ areálu.

Začínající úřednice: celý projekt ... 15 hodin $\Rightarrow$ za 1 hodinu ... $\frac{1}{15}$ areálu.

Obě úřednice za 1 hodinu: $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{3+2}{30}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$ projektu $\Rightarrow$ celý projekt zkontrolují za 6 hodin.

Obě úřednice zkontrolují společně celý projekt za 6 hodin.

Řešení příkladu úvahou je sice hezké, ale většina příkladů je tak těžkých, že s úvahou nevystačíme a musí nastoupit rovnice. Naštěstí předchozí úvaha ukazuje hlavní fintu, která se na řešení těchto úloh používá:
Vyjádříme si, jakou část práce udělá každý účastník za jednotku času, a pomocí těchto částí sledujeme vykonání celé práce.
Teď si předchozí příklad vyzkoušíme vyřešit rovnicí.

Zkušená úřednice: celý projekt ... 10 hodin $\Rightarrow$ za 1 hodinu ... $\frac{1}{10}$ areálu.

Začínající úřednice: celý projekt ... 15 hodin $\Rightarrow$ za 1 hodinu ... $\frac{1}{15}$ areálu.

Doba nutná k posekání areálu ... *x*.

Když sečteme část projektu, kterou zkontroluje zkušená úřednice, a část, kterou zkontroluje začínající kolegyně, získáme celý projekt: $x\frac{1}{10}+x\frac{1}{15}=1$.

Proč je v rovnici $x\frac{1}{10}$?
Tento výraz vyjadřuje část projektu, kterou zkontroluje zkušená úřednice (za jednu hodinu zkontroluje $\frac{1}{10}$, za *x* hodin pak $x\frac{1}{10}$).
Proč je na pravé straně rovnice 1?
Když sečteme část projektu zkontrolovanou zkušenou úřednicí a část projektu zkontrolovanou začínající úřednicí, získáme celý projekt..
Jakmile máme rovnici stává se z řešení příkladu manuální záležitost.

$$\frac{x}{10}+\frac{x}{15}=1 \qquad /\cdot 30$$
$$3x+2x=30$$
$$5x=30 \qquad /:5$$
$$x=6$$

Teď se konečně můžeme vrhnout na zajímavější příklady.

Př. 6: Nádrž je možné vypustit pomocí dvou výpustí. Samotná větší výpusť vypustí nádrž za 8 hodin, samotná menší výpusť za 10 hodin. Při posledním vypouštění měly být otevřeny obě výpusti, ale závěr větší výpusti se zablokoval a povedlo se ho otevřít až hodinu po otevření menší výpusti. Jak dlouho trvalo vypouštění? Jako neznámou si zvol dobu, po kterou byla otevřena menší výpusť.

Větší výpusť: celá nádrž ... 8 hodin $\Rightarrow$ za 1 hodinu ... $\frac{1}{8}$ nádrže.

Menší výpusť: celá nádrž ... 10 hodin $\Rightarrow$ za 1 hodinu ... $\frac{1}{10}$ nádrže.

Doba otevření menší výpusti ... x.
Doba otevření větší výpusti ... $x-1$ (otevřel se po hodině)

Část nádrže vypuštěná menší výpustí a část vypuštěná větší výpustí dají dohromady celou nádrž: $\frac{x}{10}+\frac{x-1}{8}=1 \quad / \cdot 40$

$4x+5(x-1)=40$

$4x+5x-5=40 \quad /+5$

$9x=45 \quad /:9$

$x=5$

Vypouštění nádrže trvalo 5 hodin.

Př. 7: Nádrž je možné vypustit pomocí dvou výpustí. Samotná větší výpusť vypustí nádrž za 8 hodin, samotná menší výpusť za 10 hodin. Při posledním vypouštění měly být otevřeny obě výpusti, ale závěr větší výpusti se zablokoval a povedlo se ho otevřít až hodinu po otevření menší výpusti. Jak dlouho trvalo vypouštění? Jako neznámou si zvol dobu, po kterou byla otevřena větší výpusť.

Větší výpusť: celá nádrž ... 8 hodin $\Rightarrow$ za 1 hodinu ... $\frac{1}{8}$ nádrže.

Menší výpusť: celá nádrž ... 10 hodin $\Rightarrow$ za 1 hodinu ... $\frac{1}{10}$ nádrže.

Doba otevření větší výpusti ... x
Doba otevření menší výpusti ... $x+1$ (otevřena o hodinu déle).

Část nádrže vypuštěná menší výpustí a část vypuštěná větší výpustí dají dohromady celou nádrž: $\frac{x+1}{10}+\frac{x}{8}=1 \quad / \cdot 40$

$4(x+1)+5x=40$

$4x+4+5x=40 \quad /-4$

$9x=36 \quad /:9$

$x=4$

Vypouštění nádrže trvalo 5 hodin (větší výpusť byla otevřena 4 hodiny).

Shrnutí: V případech o společném plnění úkolu využíváme části práce, která se vykoná za jednotku času.