

4.2.13 Slovní úlohy o společné práci I

Předpoklady: 040212

Pedagogická poznámka: V hodině nečekáme, až všichni dopočítají druhý příklad. Protože v příkladech 3 a 4 se vracíme k zadání prvního příkladu, přecházíme na ně v okamžiku, kdy je s dvojkou někdo hotový a ostatní mají v jedničce alespoň rovnici.

Ted' se konečně můžeme vrhnout na zajímavější příklady.

Př. 1: Ke splnění urgentní zakázky jsou k dispozici dvě linky. Na původní lince je možné vyrobit požadované zboží za 15 hodin, na modernější ještě nespouštěné lince by mělo být zboží hotovo za 10 hodin. Původní linka může být spuštěna ihned. Novou linku je třeba ještě 4 hodiny připravovat. Za jak dlouho může být zakázka připravena k expedici?

Původní linka za 1 h ... $\frac{1}{15}$ zakázky \Rightarrow za dobu plnění úkolu $x \cdot \frac{1}{15}$.

Nová linka za 1 h ... $\frac{1}{10}$ zakázky \Rightarrow za dobu plnění úkolu $(x-4) \cdot \frac{1}{10}$ (spuštěna po 4 hodinách).

$$x \cdot \frac{1}{15} + (x-4) \cdot \frac{1}{10} = 1 \quad / \cdot 30$$

$$2x + 3(x-4) = 30$$

$$2x + 3x - 12 = 30 \quad / +12$$

$$5x = 42 \quad / :5$$

$$x = 8,4 \text{ h} = 8 \text{ h } 24 \text{ min}$$

Zakázka bude dokončena za 8 hodin a 24 minut.

Př. 2: Nádrž je možné vypustit pomocí dvou výpustí. Samotná větší výpušť vypustí nádrž za 8 hodin, samotná menší výpušť za 10 hodin. Při posledním vypouštění měly být otevřeny obě výpusti, ale závěr větší výpusti se zablokoval a povedlo se ho otevřít až hodinu po otevření menší výpusti. Jak dlouho trvalo vypouštění? Jako neznámou si zvol dobu, po kterou byla otevřena menší výpušť.

Větší výpušť: celá nádrž ... 8 hodin \Rightarrow za 1 hodinu ... $\frac{1}{8}$ nádrže.

Menší výpušť: celá nádrž ... 10 hodin \Rightarrow za 1 hodinu ... $\frac{1}{10}$ nádrže.

Doba otevření menší výpusti ... x .

Doba otevření větší výpusti ... $x-1$ (otevřel se po hodině)

Část nádrže vypuštěná menší výpustí a část vypuštěná větší výpustí dají dohromady celou

$$\text{nádrž: } \frac{x}{10} + \frac{x-1}{8} = 1 \quad / \cdot 40$$

$$4x + 5(x-1) = 40$$

$$4x + 5x - 5 = 40 \quad / +5$$

$$9x = 45 \quad / :9$$

$$x = 5$$

Vypouštění nádrže trvalo 5 hodin.

Př. 3: Jaký je význam částí rovnice, které jsou vyznačeny červenou barvou?

$$\text{a) } \frac{x}{15} + \frac{x-4}{10} = 1 \qquad \text{b) } \frac{x}{15} + \frac{x-4}{10} = 1 \qquad \text{c) } \frac{x}{15} + \frac{x-4}{10} = 1$$

$$\text{a) } \frac{x}{15} + \frac{x-4}{10} = 1$$

Červeně jsou vyznačeny doby, po které linky skutečně pracovaly.

$$\text{b) } \frac{x}{15} + \frac{x-4}{10} = 1$$

Červeně jsou vyznačeny doby, za které by linky udělaly celou práci.

$$\text{c) } \frac{x}{15} + \frac{x-4}{10} = 1$$

Červeně jsou vyznačeny části celého úkolu.

Pedagogická poznámka: V hodině používám, kromě zde sepsaných rovnic i chyby, které najdu při řešení předchozího příkladu v lavicích.

Př. 4: Které z následujících rovnic jsou správným řešením předchozího příkladu? Které jsou naopak sestaveny špatně? Proč? Jaký je v každé rovnici přesný význam proměnné x ?

$$\text{a) } \frac{x}{15} + \left(\frac{x}{10} - 4 \right) = 1 \qquad \text{b) } \frac{4}{15} + \frac{x}{15} + \frac{x}{10} = 1 \qquad \text{c) } \frac{x-4}{15} + \frac{x}{10} = 1$$

$$\text{d) } \frac{1}{15} + \frac{1}{10} + x = 1 \qquad \text{e) } \frac{x+4}{15} + \frac{x}{10} = 1 \qquad \text{f) } x \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{10} \right) = \frac{11}{15}$$

$$\text{a) } \frac{x}{15} + \left(\frac{x}{10} - 4 \right) = 1$$

Určitě špatná rovnice. Zlomek $\frac{x}{10}$ má význam části celého úkolu \Rightarrow není možné od něj

odečítat číslo 4, které představuje čas, o který byla nová linka spuštěna později (navíc je zřejmé, že pro hodnoty proměnné x menší než 15 by celá levá strana rovnice vyšla záporně).

Proměnná x zřejmě představuje dobu, po kterou pracovala původní linka (vystupuje samostatně ve zlomku, který představuje část práce vykonanou původní linkou).

$$\text{b) } \frac{4}{15} + \frac{x}{15} + \frac{x}{10} = 1$$

Správná rovnice. Vlevo vystupují tři části práce:

- $\frac{4}{15}$: část práce vykonaná původní linkou v době, kdy se moderní linka ještě připravovala,
- $\frac{x}{15}$: část práce vykonaná původní linkou v době, kdy pracovaly obě linky,
- $\frac{x}{10}$: část práce vykonaná moderní linkou v době, kdy pracovaly obě linky,

jejichž součet představuje celou zakázku.

Neznámá x představuje dobu, po kterou pracovaly obě linky najednou.

$$\text{c) } \frac{x-4}{15} + \frac{x}{10} = 1$$

Špatná rovnice. Číslo $(x-4)$ představuje dobu, po kterou pracovala původní linka, tato doba má být delší než doba, po kterou pracovala moderní linka (správně mělo být $(x+4)$).

Neznámá x představuje dobu, po kterou pracovala moderní linka.

$$\text{d) } \frac{1}{15} + \frac{1}{10} + x = 1$$

Špatná rovnice. Pokud neznámá x představuje dobu, po kterou pracovala některá z linek, nemůžeme ji sčítat s částmi práce, které vykonají linky za 1 hodinu.

Co představuje neznámá x se nedá ze zapsané rovnice přesně odhadnout (z logiky rovnice by neznámá x představovala část práce, kterou je nutné vykonat po jedné hodině běhu obou linek, ale tento údaj nijak nenapomáhá řešení určení doby požadované v zadání).

$$\text{e) } \frac{x+4}{15} + \frac{x}{10} = 1$$

Správná rovnice. Vlevo vystupují tři části práce:

- $\frac{x+4}{15}$: část práce vykonaná původní linkou za celou dobu jejího provozu,
- $\frac{x}{10}$: část práce vykonaná moderní linkou za celou dobu jejího provozu,

jejichž součet představuje celou zakázku.

Doba běhu původní linky byla o 4 hodiny delší než doba běhu moderní linky.

Neznámá x představuje dobu, po kterou pracovala moderní linka.

$$\text{f) } x \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{10} \right) = \frac{11}{15}$$

Správná rovnice. Pravá strana představuje část práce, kterou bylo nutné vykonat v okamžiku, kdy byla spuštěna moderní linka $(1 - \frac{4}{15})$.

Na levé straně násobíme část úkolu, kterou vykonají obě linky společně za 1 hodinu, časem, po který jsou spuštěny obě linky.

Neznámá x představuje dobu, po kterou pracovaly obě linky.

Př. 5: Firma připravuje výkop na položení optického kabelu. Na výkopu pracují dva bagry, jeden by celou práci zvládl za čas o 16 hodin kratší než druhý. Za jak dlouho by každý z nich zrealizoval celý výkop samostatně, když společně měly hotovo po 15 hodinách?

Pomalejší bagr: celý výkop ... x h \Rightarrow za jednu hodinu ... $\frac{1}{x}$ celého výkopu
 Rychlejší bagr: celý výkop ... $x-16$ h \Rightarrow za jednu hodinu ... $\frac{1}{x-16}$ celého výkopu.

$$\text{Celý výkop za 15 hodin: } 15 \cdot \frac{1}{x} + 15 \cdot \frac{1}{x-16} = 1 \quad / \cdot x(x-16)$$

$$15(x-16) + 15x = x(x-16)$$

$$15x - 240 + 15x = x^2 - 16x$$

$$30x - 240 = x^2 - 16x \quad / -30x + 240$$

$$0 = x^2 - 46x + 240$$

Protože tušíme, že příklad je předpřipravený na hezká čísla, zkusíme rozklad uhádnout:

$240 = 24 \cdot 10 = 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \Rightarrow$ tato čísla musíme rozdělit do dvou skupin, které tvoří čísla se součtem 46. Součet 24 je malý \Rightarrow hledáme rozdílnější čísla \Rightarrow prohodíme 3 a 5 $\Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 = 40 \cdot 6$, platí $40 + 6 = 46 \Rightarrow$

$$x^2 - 46x + 240 = (x-40)(x-6)$$

$$x_1 = 40 \Rightarrow \text{rychlejší bagr vykope příkop za } 40 - 16 = 24 \text{ hodin,}$$

$$x_2 = 6 \Rightarrow \text{rychlejší bagr vykope příkop za } 6 - 16 = -10 \text{ - nedává smysl.}$$

Rychlejší bagr by příkop vykopal samostatně za 24 hodin, pomalejší za 40 hodin.

Př. 6: Napouštění venkovního bazénu trvá čerpadlem místních hasičů 12 hodin. V předvečer slavnostního otevření nových kabiněk si místní děvčata hrála u stavidla a podařilo se jim bazén vypustit. Nikdo nikomu samozřejmě nic neřekl, a proto, když si druhý den dopoledne přišel starosta areál prohlédnout, zjistil, že převlékání bude sice jednodušší, ale s koupáním bude problém. Hasiči ihned zalarmovali veškeré vybavení: obě čerpadla s výkonem zmíněným v úvodu a staré už vyřazené čerpadlo, kterým se bazén napouštěl dříve o polovinu déle. Všechna technika byla ihned spuštěna, navíc se po hodině podařilo zprovoznit ještě jedno pomalejší čerpadlo, zapůjčené z domova jedním z hasičů. Za jak dlouho se podařilo bazén naplnit? Jaký je výkon pomalejšího čerpadla vzhledem k výkonu rychlejšího čerpadla?

Běžné čerpadlo: celý bazén ... 12 hodin \Rightarrow 1 hodina ... $\frac{1}{12}$ bazénu

Záložní čerpadlo: celý bazén ... 18 hodin \Rightarrow 1 hodina ... $\frac{1}{18}$ bazénu

Bazén byl napuštěn dvěma běžnými a jedním záložním čerpadlem od začátku a jedním

$$\text{záložním po jedné hodině za neznámý čas: } x \cdot \frac{2}{12} + x \cdot \frac{1}{18} + (x-1) \cdot \frac{1}{18} = 1.$$

$$x \cdot \frac{1}{6} + x \cdot \frac{1}{18} + (x-1) \cdot \frac{1}{18} = 18 \quad / \cdot 18$$

$$x \cdot 3 + x + x - 1 = 18 \quad / +1$$

$$5x = 19 \quad / :5$$

$$x = \frac{19}{5} \text{ h} = 3 \frac{4}{5} \text{ h} = 3 \text{ h } 48 \text{ min}$$

Porovnání výkonu čerpadel

Představíme si, kolik bazénů by čerpadla napustila za $12 \cdot 18$ hodin:

- běžné čerpadlo: $\frac{12 \cdot 18}{12} = 18$,
- záložní čerpadlo: $\frac{12 \cdot 18}{18} = 12$.

Obě hodnoty jsou množství ve stejné jednotce (bazén) za stejný čas \Rightarrow můžeme je dát do poměru: *běžné čerpadlo* : *záložní čerpadlo* = $18 : 12 = 6 : 4 = 3 : 2 \Rightarrow$ běžné čerpadlo má o polovinu větší výkon než záložní.

Pedagogická poznámka: Otázka na poměr výkonů je zajímavá a v kontextu nečekaná, proto se k ní vracíme na začátku příští hodiny.

Shrnutí: Sčítat, odčítat a porovnávat můžeme v rovnicích jen čísla se stejným významem.