

4.2.14 Slovní úlohy o společné práci II

Předpoklady: 040213

Pedagogická poznámka: Třetí příklad je zabavení pro rychlejší část třídy. Jakmile má většina hotový druhý příklad, přecházíme k příkladu 4.

Př. 1: Sepiš postup na řešení příkladů o společné práci.

- Ze zadání si určíme, jakou část práce vykonali účastníci za jednotku času.
- Vyjádříme si, jakou část celkové práce vykonali účastníci během plnění úkolu.
- Součet těchto částí musí dát dohromady celou práci (1 na pravé straně rovnice).

Př. 2: Maminka si na každou zimu objednává stejné množství uhlí. Každý rok ho skládal jeden z jejích tří synů: Karel to stihl za 3,6 hodiny, Lukáš za 4,8 hodiny a Michal za 4 hodiny. Letos se rozhodli, že uhlí uklidí společně. Nejdřív uklízel hodinu Karel, pak hodinu a půl Lukáš a zbytek dodělal Michal. Jak dlouho mu to trvalo? Spočítej, jak dlouho měl pracovat každý z bratrů, aby všichni sklídili stejně velkou část uhlí.

Karel: vše ... 3,6 h \Rightarrow 1 hod ... $\frac{1}{3,6}$ všeho

Lukáš: vše ... 4,8 h \Rightarrow 1 hod ... $\frac{1}{4,8}$ všeho

Michal: vše ... 4 h \Rightarrow 1 hod ... $\frac{1}{4}$ všeho

Sklízení uhlí zachycuje rovnice: $1 \cdot \frac{1}{3,6} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4,8} + x \cdot \frac{1}{4} = 1$.

$$1 \cdot \frac{10}{36} + \frac{3}{2} \cdot \frac{10}{48} + x \cdot \frac{1}{4} = 1$$

$$\frac{5}{18} + \frac{5}{16} + x \cdot \frac{1}{4} = 1 \quad / \cdot 16 \cdot 9$$

$$40 + 45 + 36x = 144 \quad / -85$$

$$36x = 59 \quad / :36$$

$$x = \frac{59}{36} = 1 \frac{23}{36} \text{ h} = 1 \text{ h } 38 \text{ min } 20 \text{ s}$$

Michal skládal uhlí přibližně hodinu a 38 minut.

Pokud mají všichni odpracovat stejně, musí složit třetinu uhlí a tedy pracovat třetinu doby, kterou potřebovali ke složení všeho:

- Karel: $\frac{3,6}{3} \text{ h} = 1,2 \text{ h} = 1 \text{ h } 12 \text{ min}$,
- Lukáš: $\frac{4,8}{3} \text{ h} = 1,6 \text{ h} = 1 \text{ h } 36 \text{ min}$,

- Michal: $\frac{4}{3}$ h = 1 h 20 min .

Dodatek: Příklad je možné řešit také odečtením částí odpracovaných Karlem a Lukášem od celé práce a sestavení rovnice pouze pro zbytek.

Dodatek: Doby pro spravedlivé skládání jde samozřejmě i odvodit (trochu zbytečně) výpočtem:
Pokud mají všichni sklidit stejnou část, musí vykonat třetinu práce \Rightarrow pro každého z nich tak musí platit: $x \cdot \frac{1}{\text{doba skládání všeho}} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{\text{doba skládání všeho}}{3}$.

Př. 3: Kropáček, známý kutil, používá na skládání uhlí tři automatické karbosortéry. Při poslední příležitosti se rozhodl aplikovat některá vylepšení, která našel na internetu. První karbosortér pustil bez úprav, na druhém po třech hodinách práce zvýšil napětí centrální jednotce divergence elektromagnetického pole, čímž dosáhl zvýšení výkonu a tím zkrácení doby potřebné k uklizení uhlí o jednu pětinu. Tím se dostal ke třetímu, na kterém další tři hodiny zvyšoval dělicí frekvenci třídícího procesoru a snižoval hodnotu rozdělovacího napětí konvergenční jednotky. Tím se mu podařilo zvýšit výkon takovým způsobem, který by při vyklízení celého nákladu tímto jediným karbosortérem znamenal zkrácení potřebného času o 9 hodin. Po spuštění posledního karbosortéru již trvalo jen čtyři hodiny, než bylo uhlí uklizeno. Jak dlouho by všechno uhlí bylo uklizeno každým z karbosortérů zvlášť? Jak dlouho by uklízení trvalo, kdyby nedělal žádné úpravy a pustil všechny karbosortéry na začátku?

Neupravený karbosortér (zapojen 10 h): vše ... x hodin \Rightarrow za jednu hodinu ... $\frac{1}{x}$

První upravený karbosortér (7 h): vše ... $x - \frac{1}{5}x = \frac{4}{5}x$ hodin \Rightarrow za jednu hodinu ... $\frac{1}{\frac{4}{5}x} = \frac{5}{4x}$

Druhý upravený karbosortér (4 h): vše ... $x - 9$ hodin \Rightarrow za jednu hodinu ... $\frac{1}{x-9}$

$$\text{Celková rovnice: } 10 \cdot \frac{1}{x} + 7 \cdot \frac{5}{4x} + 4 \cdot \frac{1}{x-9} = 1 \quad / \cdot 4x \cdot (x-9)$$

$$10 \cdot 4 \cdot (x-9) + 7 \cdot 5 \cdot (x-9) + 4 \cdot 4x = 4x \cdot (x-9)$$

$$40 \cdot (x-9) + 35 \cdot (x-9) + 16x = 4x^2 - 36x$$

$$40x - 360 + 35x - 315 + 16x = 4x^2 - 36x$$

$$91x - 675 = 4x^2 - 36x \quad / -91x + 675$$

$$0 = 4x^2 - 127x + 675$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-127) \pm \sqrt{(-127)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 675}}{2 \cdot 4} = \frac{127 \pm \sqrt{5329}}{8} = \frac{127 \pm 73}{8}$$

$$x_1 = \frac{127 + 73}{8} = \frac{200}{8} = 25$$

$$x_2 = \frac{127 - 73}{8} = \frac{54}{8} = \frac{27}{4} = 6,75 \text{ (nedává smysl pro druhý}$$

upravený karbosotér)

Neupravený karbosortér by uklidil uhlí za 25 hodin, karbosortér upravený prvním způsobem za 20 hodin, karbosortér upravený druhým způsobem za 16 hodin.

$$\text{Doba uklízení bez úprav: } x \cdot \frac{3}{25} = 1 \quad /: \frac{3}{25}$$

$$x = \frac{25}{3} \text{ h} = 8\frac{1}{3} \text{ h} = 8 \text{ h } 20 \text{ min}$$

Pokud by Kropáček neprováděl žádné úpravy a pustil by rovnou všechny tři karbosortéry, bylo by uhlí uklizeno za 8 hodin 20 minut.

Př. 4: Sestav rovnice, pro řešení následujících příkladů. Rovnice neřeš.

- Učitel začátečník zkontroluje 350 položek inventárního seznamu za 8 hodin čistého času, jeho zkušenější kolega stihne kontrolu za 5 hodin. Jak dlouhou bude začátečník kontrolovat, jestliže mu jeho zkušenější kolega přijde pomoci po dvou hodinách a zbytek práce pak dokončí společně?
- Produkcí jogurtů zajišťují tři stejné linky, každá z nich vyrobí kamión jogurtů za dvě hodiny. Za jak dlouho vyrobí kamión produktů všechny tři linky dohromady, jestliže druhá se rozběhne deset minut po první a třetí pracuje jen polovinu doby, po kterou je spuštěna první linka?
- Produkcí jogurtů zajišťují tři linky, dohromady vyrobily kamión jogurtů za dvě hodiny. Za jak dlouho by vyrobila kamión produktů každá zvlášť, jestliže výkon druhé je o deset procent a výkon třetí dokonce o polovinu větší než první?
- Adam by jednu stranu čtvercového výkopu vykopal za tři hodiny, Bedřich za čtyři. Za jak dlouho společně vykopají celý výkop, jestliže Adam přijde do práce o půl hodiny později?
- Učitel začátečník proškrtá dvě stě stran vyplněné třídnice za 5 hodin, učitel s praxí za dobu o dvě hodiny kratší. Jak dlouho budou vyškrtávat společně 8 třídnic, jestliže začátečník začne o půl hodiny dříve?

a) Učitel začátečník zkontroluje 350 položek inventárního seznamu za 8 hodin čistého času, jeho zkušenější kolega stihne kontrolu za 5 hodin. Jak dlouhou bude začátečník kontrolovat, jestliže mu jeho zkušenější kolega přijde pomoci po dvou hodinách a zbytek práce pak dokončí společně?

$$\text{Práce vykonaná začátečníkem} \quad \dots \quad x \cdot \frac{1}{8} \text{ (počet hodin} \cdot \text{ část práce za 1 hodinu)}$$

$$\text{Práce vykonaná kolegou} \quad \dots \quad (x-2) \cdot \frac{1}{5} \text{ (počet hodin} \cdot \text{ část práce za 1 hodinu)}$$

Číslo 350 nehraje v řešení příkladu roli (zajímá nás kontrola celého seznamu, ne jednotlivých položek)

$$x \cdot \frac{1}{8} + (x-2) \cdot \frac{1}{5} = 1$$

b) Produkcí jogurtů zajišťují tři stejné linky, každá z nich vyrobí kamión jogurtů za dvě hodiny. Za jak dlouho vyrobí kamión produktů všechny tři linky dohromady, jestliže druhá se rozběhne deset minut po první a třetí pracuje jen polovinu doby, po kterou je spuštěna první linka?

Každá ze tří linek vyrobí za 1 hodinu $\frac{1}{2}$ kamiónu jogurtů. První linka pracuje x hodin, druhá linka o deset minut méně $x - \frac{10}{60} = x - \frac{1}{6}$, třetí jen polovinu doby $\frac{x}{2}$

$$x \cdot \frac{1}{2} + \left(x - \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

c) Produkci jogurtů zajišťují tři linky, dohromady vyrobily kamión jogurtů za dvě hodiny. Za jak dlouho by vyrobila kamión produktů každá zvlášť, jestliže výkon druhé je o deset procent a výkon třetí dokonce o polovinu větší než první?

První linka vyrobí jogurty za x hodin \Rightarrow za 1 hodinu $\frac{1}{x} \Rightarrow$ za 2 hodiny $2 \cdot \frac{1}{x}$ kamiónu.

Druhá linka výkon o 10 % vyšší \Rightarrow 1,1 výkonu první linky \Rightarrow za 2 hodiny $2 \cdot \frac{1,1}{x}$ kamiónu.

Třetí linka výkon o polovinu vyšší \Rightarrow $\frac{3}{2}$ výkonu první linky \Rightarrow za 2 hodiny $\frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{x}$ kamiónu.

Celkem všechny tři linky naplní jeden kamión $2 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot 1,1 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x} = 1$.

d) Adam by jednu stranu čtvercového výkopu vykopal za tři hodiny, Bedřich za čtyři. Za jak dlouho společně vykopají celý výkop, jestliže Adam přijde do práce o půl hodiny později?

Práce vykonaná Adamem ... $\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{3}$ (počet hodin \cdot část práce za 1 hodinu)

Práce vykonaná Bedřichem ... $x \cdot \frac{1}{4}$ (počet hodin \cdot část práce za 1 hodinu)

Na pravé straně je 4, protože musí vykopat čtyři strany výkopu.

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{3} + x \cdot \frac{1}{4} = 4$$

e) Učitel začátečník proškrtá dvě stě stran vyplněné třídnice za 5 hodin, učitel s praxí za dobu o dvě hodiny kratší. Jak dlouho budou vyškrtávat společně 8 třídnic, jestliže začátečník začne o půl hodiny dříve?

Práce vykonaná začátečníkem ... $\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{5}$ (počet hodin \cdot část práce za 1 hodinu)

Práce vykonaná kolegou ... $x \cdot \frac{1}{3}$ (počet hodin \cdot část práce za 1 hodinu, stíhá proškrtat jednu třídnici za 3 hodiny)

$$\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{5} + x \cdot \frac{1}{3} = 8$$

Př. 5: V čem bod e) posledního příkladu špatně zachycuje skutečnost?

Jednu třídnici může najednou proškrtávat pouze jeden člověk \Rightarrow na proškrtávání poslední třídnice nebudou učitelé moci spolupracovat \Rightarrow výpočet by byl správný pouze za předpokladu, že oba dokončí proškrtávání své poslední třídnice společně.

Př. 6: Vymysli k následujícím rovnicím slovní zadání na společné dosahování cíle.

a) $1 = 4 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{6} \right)$

b) $x \cdot \frac{1}{3} + x \cdot \frac{1}{4} = 1$

c) $1 = \frac{1}{4} + 2 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{6} \right)$

d) $(x+3) \cdot \frac{1}{12} + x \cdot \frac{1}{15} = 1$

e) $1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$

a) $1 = 4 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{6} \right)$

Petr poseká louku sám za 6 hodin. Za jak dlouho by louku posekal sám Jarda, když ji společně s Petrem posekal za 4 hodiny?

b) $x \cdot \frac{1}{3} + x \cdot \frac{1}{4} = 1$

Otesán vypije rybník za tři hodiny, Otesánek za čtyři. Za jak dlouho vypijí rybník společně?

c) $1 = \frac{1}{4} + 2 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{6} \right)$

Pepa vystřílí všechny padouchy v levelu za 6 minut. Za jak dlouho by všechny padouchy vystřílel Radek, když spolu s Pepou vystříleli tři čtvrtiny padouchů ve dvou minutách?

d) $(x+3) \cdot \frac{1}{12} + x \cdot \frac{1}{15} = 1$

Ivan s Johnem chytají lelky. Ivan by všechny pochytal za 12 hodin, John za 15. Ivan začne chytat a John mu po třech hodinách začne pomáhat. Za jak dlouho od tohoto okamžiku budou s chytáním hotoví?

e) $1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$

Záleží na pojetí.

Bára s Cilkou tlučou špačky. Každá z nich by samostatně stihla všechny potlouct za dvě hodiny. Jak dlouho musí Cilka tlučit, když jí Bára pomáhala pouze dvacet minut?

Bára s Cilkou tlučou špačky. Společně je potloukly za půl hodiny. Za jak dlouho by je potloukla samotná Cilka, když Bára je samostatně potluče za tři hodiny?

Shrnutí: Sčítat, odčítat a porovnávat můžeme v rovnicích jen čísla se stejným významem.