4.2.17 Slovní úlohy o pohybu

Předpoklady: 040215

Př. 1: Zapiš vzorec, který popisuje dráhu rovnoměrného pohybu. Vyjádři ze vzorce i ostatní veličiny, které v něm vystupují, vzorce zkontroluj úvahou.

- $s = vt$: čím delší dobu a čím větší rychlostí jdu, tím větší vzdálenost ujdu,
- $v = \frac{s}{t}$:
  - velkou rychlostí se pohybuji, pokud ujdu velkou vzdálenost za krátký čas (podíl velkého čitatele a malého jmenovatele),
  - malou rychlostí se pohybuji, pokud ujdu malou vzdálenost za dlouhý čas (podíl malého čitatele a velkého jmenovatele).
- $t = \frac{s}{v}$
  - velký čas potřebuji na přesun o velkou vzdálenost malou rychlostí (podíl velkého čitatele a malého jmenovatele),
  - malou čas potřebuji na přesun o malou vzdálenost velkou rychlostí (podíl malého čitatele a velkého jmenovatele).

Pedagogická poznámka: Je to pořád dokola, ale stále se snažím, aby se žáci naučili automaticky interpretovat každý vzorec, se kterým se setkají.

Př. 2: Véna s Pepanem plánovali romantickou procházku. Bohužel ve chvíli, kdy měli vyrazit, volal Véna Pepanovi, že se zdržel na opravce ve škole, aby vyrazil, že ho za chvíli dohoní. Pepa se tedy rozploužil rychlostí 3 km/h původně plánovaným směrem. Véna se nakonec zdržel o trochu víc než čekal, takže si radši vzal kolo a vyrazil za Pepanem rychlostí 15 km za hodinu po 40 minutách. Kdy a kde Véna Pepana dohonil?

Ve chvíli, kdy Véna Pepu dohoní, budou stejně daleko od začátku cesty: $s_V = s_P$.

Dosadíme časy a rychlosti: $v_V t_V = v_P t_P$, rychlosti známe, potřebujeme jeden čas vyjádřit pomocí druhého, aby v rovnici zbyla jediná neznámá.

Véna vyrazil o 40 minut později: $t_V = t_P - \frac{40}{60} = t_P - \frac{2}{3}$ (čas musíme převést na hodiny, protože rychlosti dosazujeme v km/h).

Dosadíme: $v_V \left(t_P - \frac{2}{3} \right) = v_P t_P$.

Dosadíme hodnoty rychlostí: $15 \left(t_P - \frac{2}{3} \right) = 3t_P$.

$15t_p - 10 = 3t_p \qquad / +10 - 3t_p$

$12t_P = 10 \qquad / :12$

$t_P = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \Rightarrow$ Pepa šel $\frac{5}{6}$ hodiny (50 minut), než ho Véna dohnal.

$s_P = v_P t_P = 3 \cdot \frac{5}{6}\ \text{km} = \frac{5}{2}\ \text{km} = 2{,}5\ \text{km}$

Kontrola:

Doba, po kterou byl Véna na cestě: $t_V = t_P - \frac{2}{3} = \frac{5}{6} - \frac{2}{3}\ \text{h} = \frac{5-4}{6}\ \text{h} = \frac{1}{6}\ \text{h} = 10\ \text{min}$.

Dráha Vény: $s_V = v_V t_V = 15 \cdot \frac{1}{6}\ \text{km} = \frac{5}{2}\ \text{km} = 2{,}5\ \text{km}$

Pro oba výletníky jsme získali stejnou dráhu $\Rightarrow$ zkouška vyšla.

Pepa šel 50 minut než ho Véna 2,5 km od domova dohnal.

Řešení úloh na pohyby se typicky skládá z následujících bodů (jako ukázka je zvoleno řešení předchozího příkladu):

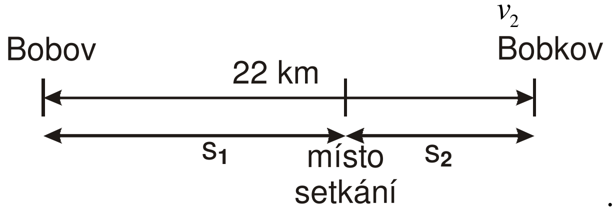
- Najdeme rovnici, která popisuje základní rys situace ($s_V = s_P$, když se potkají, jsou stejně daleko od domova). Neděsíme se, že v ní skoro nic neznáme.
- Využijeme jeden ze vzorců pro veličiny rovnoměrného pohybu a nahradíme v rovnici veličiny, které neznáme a nechceme je určit: $v_V t_V = v_P t_P$.
- Napíšeme si, které veličiny známe ze zadání a zjistíme, kolik neznámých v rovnici zbývá: $\underbrace{v_V}_{15} t_V = \underbrace{v_P}_{3} t_P$.
- Pokud zbývá více než jedna veličina, snažíme v údajích v zadání najít vztah, který umožnil jednu ze zbývajících veličin vyjádřit z ostatních: $t_V = t_P - \frac{40}{60} = t_P - \frac{2}{3}$. Tento bod provádíme dokud v rovnici nezůstane jediná neznámá.
- Rovnici vyřešíme.
- Pokud je potřeba odpočítáme další veličiny.

Dobrá zpráva: Pokud jako poslední nezůstane v rovnici veličina, kterou máme určit, není to žádný problém. Dopočítávání je v naprosté většině případů velmi snadné.

Př. 3: Bob a Bobek bydlí každý v jiné vesnici 22 km od sebe. Přesto se často setkávají a za pěkného počasí oba jezdí společně na kole. Bob je větší vyrazí v 13:15, Bobek je menší a tak vyjíždí až ve 13:26 rychlostí 4 km/h menší než Bob. Jakou rychlostí musí jet, aby se setkali přesně v 13:50? Kolik km každý z nich ujede?

Bob	Bobek
s_1	s_2
Doba jízdy: 13:50-13:15 $t_1 = \frac{35}{60}\ \text{h} = \frac{7}{12}\ \text{h}$.	Doba jízdy: 13:50-13:26 $t_2 = \frac{24}{60}\ \text{h} = \frac{2}{5}\ \text{h}$
v_1	v_2

Obrázek:



.

Ve chvíli, kdy se setkají ujedou společně celou vzdálenost: $s_1 + s_2 = 22$.

Dosadíme časy a rychlosti: $v_1 t_1 + v_2 t_2 = s$.

Celkovou dráhu i časy známe, musíme si vyjádřit jednu z rychlostí: $v_1 = v_2 + 4$:

Dosadíme: $(v_2 + 4)t_1 + v_2 t_2 = s$

$$(v_2 + 4)\frac{7}{12} + v_2\frac{2}{5} = 22 \qquad / \cdot 60$$

$$(v_2 + 4)35 + v_2 \cdot 24 = 1320$$

$$35v_2 + 140 + v_2 \cdot 24 = 1320 \qquad / -140$$

$$59v_2 = 1180 \qquad / : 59$$

$$v_2 = 20 \;\Rightarrow\; v_1 = v_2 + 4 \text{ km/h} = 20 + 4 \text{ km/h} = 24 \text{ km/h}$$

Dráha Boba: $s_1 = v_1 t_1 = 24 \cdot \frac{7}{12} \text{ km} = 14 \text{ km}$.

Dráha Bobka: $s_2 = v_2 t_2 = 20 \cdot \frac{2}{5} \text{ km} = 8 \text{ km}$.

Součet obou drah je 22, což odpovídá zadání.

Bob musí jet rychlostí 24 km/H, Bobek rychlostí 20 km/h, jestliže se mají ve 13:50 setkat.

Dodatek: Na řešení se nic podstatné ho nezmění, když si vyjádříme rychlost Bobka:

$$v_2 = v_1 - 4$$

$$v_1 t_1 + (v_1 - 4)t_2 = s$$

$$v_1\frac{7}{12} + (v_1 - 4)\frac{2}{5} = 22 \qquad / \cdot 60$$

$$35v_1 + 24v_1 - 96 = 1320$$

$$59v_1 = 1416$$

$$v_1 = 24$$

Získali jsme rychlost Boba, dopočítat musíme rychlost Bobka.

Př. 4: Zlomkoslav se rozhodl, že do školy dojede na kole. Vyrazil a než píchnul duší ujel 12 km. Zbývajících 1,5 km musel kolo vést a ač se snažil, co mohl, pohyboval se pouze čtvrtinovou rychlostí než na kole. Přesto byla jeho průměrná rychlost za celou cestu jen o 6 km/h menší než rychlost, kterou jel na kole. Jakou rychlostí se pohyboval?

Hledáme rovnici, která popisuje děj, jako celek: $t_k + t_p = t$. Známe dráhy částí i celku, chceme spočítat rychlosti $\Rightarrow$ dosadíme $t = \frac{s}{v}$.

$\frac{s_k}{v_k} + \frac{s_p}{v_p} = \frac{s}{v}$, dosadíme za dráhy: $\frac{12}{v_k} + \frac{1,5}{v_p} = \frac{13,5}{v}$.

Zbývají tři neznámé $\Rightarrow$ musíme vyjádřit rychlosti. Vyjádříme pomocí rychlosti na kole (k té se vztahují informace ze zadání):

- pěšky šel čtvrtinou rychlost než na kole: $v_p = \frac{v_k}{4}$,
- průměrná rychlost byla o 6 km/h nižší: $v = v_k - 6$.

Dosadíme: $\frac{12}{v_k}+\frac{1,5}{\frac{v_k}{4}}=\frac{13,5}{v_k-6}$.

Upravíme a vynecháme indexy: $\frac{12}{v}+\frac{6}{v}=\frac{13,5}{v-6}$ $\quad / v(v-6)$.

$12(v-6)+6(v-6)=13,5v$

$12v-72+6v-36=13,5v \quad / -13,5\,v$

$4,5v-108=0 \quad / +108$

$4,5v=108 \quad / : 4,5$

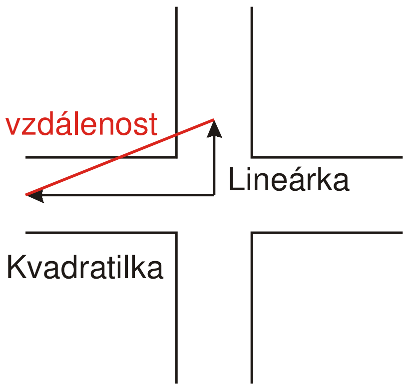
$v=108:4,5=24$

Zlomkoslav jel na kole rychlostí 24 km/h. Dopočteme ostatní rychlosti:

- rychlost chůze: $v_p=\frac{v_k}{4}=\frac{24}{4}\text{ km/h}=6\text{ km/h}$,
- průměrná rychlost: $v=v_k-6=24-6\text{ km/h}=18\text{ km/h}$.

Zlomkoslav jel na kole rychlostí 24 km/h, šel pěšky rychlostí 6 km/h. Během celé cesty se pohyboval průměrnou rychlostí 18 km/h.

Př. 5: Známé sestry Rovnicovy Lineárka s Kvadratilkou se rozešly na kolmé křižovatce dvou dlouhých rovných cest. Lineárka šla velmi rychle směrem na Sever, Kvadratilka jela na kole na západ rychlostí o 17 km/h vyšší. Po půl hodině byly od sebe obě sestry vzdáleny již 12,5 km. Jakou rychlostí se pohybovaly?



Z obrázku je zřejmé, že vzdálenost sester je přeponou v pravoúhlém trojúhelníku, kde odvěsny jsou dráhy, které každá se sester urazila.

$s_L^2+s_K^2=12,5^2$

$(v_L t_L)^2+(v_K t_K)^2=12,5^2$

$v_L^2 t_L^2+v_K^2 t_K^2=12,5^2$

Časy známe, zůstávají dvě neznámé $\Rightarrow$ musíme jednu rychlost vyjádřit z druhé. Kvadratilka jela rychlostí o 17 km/h větší: $v_K=v_L+17$.

Dosadíme: $v_L^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+(v_L+17)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=12,5^2$.

$v_L^2\frac{1}{4}+(v_L+17)^2\frac{1}{4}=156,25 \quad / \cdot 4$

$v_L^2+(v_L+17)^2=625$

$v_L^2 + v_L^2 + 34v_L + 289 = 625$

$2v_L^2 + 34v_L - 336 = 0 \qquad / : 2$

$v_L^2 + 17v_L - 168 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-168)}}{2 \cdot 1} = \frac{-17 \pm \sqrt{961}}{2} = \frac{-17 \pm 31}{2}$$

$x_1 = \frac{-17+31}{2} = \frac{14}{2} = 7 \Rightarrow$ rychlost Kvadratilky $v_K = v_L + 17 = 7 + 17 \text{ km/h} = 24 \text{ km/h}$.

$x_2 = \frac{-17-31}{2} = \frac{-48}{2} = -24 \Rightarrow$ nemá fyzikální význam.

Kvadratilka je rychlost 24 km/h, Lineárka pospíchala pěšky rychlostí 7 km/h.

Př. 6: Udatný rytíř Determinant odcválal na svém oři 16 km do nejbližšího královského města. Kdyby cválal o 4 km rychleji, byl by tam o 8 minut dříve. Jak dlouho ve skutečnosti cválal? Vyřeš příklad oběma způsoby (na začátku je možné vyjít ze dvou různých rovnic, zkus nají obě možnosti a porovnat obě řešení).

Skutečná jízda	Rychlejší jízda
$s_s = 16 \text{ km}$	$s_r = 16 \text{ km}$
v_s	v_r
t_s	t_r

Kdyby cválal rychleji, byl by tam o 8 minut dříve: $t_r = t_s - \frac{8}{60} = t_s - \frac{2}{15}$.

Dosadíme za časy, tak abychom použili známou vzdálenost a v rovnici se objevily rychlosti.

$\frac{s_r}{v_r} = \frac{s_s}{v_s} - \frac{2}{15} \Rightarrow$ dráhy známe, musíme z jedné rychlosti vyjádřit druhou, abychom získali rovnici s jedinou neznámou. Kdyby cválal o 4 km/h rychleji: $v_r = v_s + 4$.

$$\frac{s_r}{v_s + 4} = \frac{s_s}{v_s} - \frac{2}{15}$$

Dosadíme za dráhu a zrušíme indexy: $\frac{16}{v+4} = \frac{16}{v} - \frac{2}{15} \qquad / \cdot 15(v+4)v$.

$15 \cdot 16 \cdot v = 15 \cdot 16 \cdot (v+4) - 2 \cdot v(v+4)$

$240v = 240v + 960 - 2v^2 - 8v \qquad / -240v$

$0 = 960 - 2v^2 - 8v \qquad / : 2$

$0 = 480 - v^2 - 4v \qquad / \cdot (-1)$

$v^2 + 4v - 480 = 0$

$$v_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-480)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{1936}}{2} = \frac{-4 \pm 44}{2}$$

$v_1 = \frac{-4+44}{2} = \frac{40}{2} = 20$

$v_2 = \frac{-4-44}{2} = \frac{-48}{2} = -24 \Rightarrow$ nemá fyzikální význam.

Doba cvalu: $t_s = \frac{s}{v} = \frac{16}{20}\,\mathrm{h} = \frac{4}{5}\,\mathrm{h} = 48\ \mathrm{min}$.

Druhý způsob řešení: vyjdeme z rovnice o rychlosti.
Kdyby cválal o 4 km/h rychleji: $v_r = v_s + 4$.
Dosadíme za rychlosti, tak abychom použili známou vzdálenost a v rovnici se objevily časy:
$\frac{s_r}{t_r} = \frac{s_s}{t_s} + 4 \Rightarrow$ dráhy známe, musíme z jednoho času vyjádřit druhý, abychom získali rovnici s jedinou neznámou. Byl by tam o 8 minut dříve: $t_r = t_s - \frac{8}{60} = t_s - \frac{2}{15}$.

$$\frac{s_r}{t_s - \frac{2}{15}} = \frac{s_s}{t_s} + 4$$

Dosadíme za dráhu a zrušíme indexy: $\frac{16}{t - \frac{2}{15}} = \frac{16}{t} + 4$

$$\frac{16}{\frac{15t-2}{15}} = \frac{16\cdot 15}{15t-2} = \frac{16}{t} + 4 \qquad /\cdot t(15t-2)$$

$$16\cdot 15\cdot t = 16(15t-2) + 4t(15t-2)$$

$$240t = 240t - 32 + 60t^2 - 8t \qquad / -240t$$

$$0 = 60t^2 - 8t - 32 \qquad /:4$$

$$15t^2 - 2t - 8 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 15\cdot(-8)}}{2\cdot 15} = \frac{2 \pm \sqrt{484}}{30} = \frac{2 \pm 22}{30}$$

$$t_1 = \frac{2+22}{30} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$$

$t_2 = \frac{2-22}{30} = \frac{-20}{30} = -\frac{2}{3} \Rightarrow$ nemá fyzikální význam.

Udatný Determinant cválal do města 48 minut rychlostí 20 km/h.

Shrnutí: Při řešení slovních úloh o pohybu vycházíme z rovnice, která vyjadřuje celkovou charakteristiku situace (mnohdy existuje více možností, kde začít).