4.2.18 Slovní úlohy o pohybu II

Předpoklady: 040217

Typické řešení slovní úlohy o pohybu:
- Najdeme rovnici, která popisuje základní rys situace.
- Využijeme jeden ze vzorců $s = vt$, $v = \frac{s}{t}$, $t = \frac{s}{v}$ a přepíšeme rovnici do zbývajících veličin.
- Dosadíme číselné hodnoty ze zadání.
- Pokud zbývá více než jedna veličina, snažíme se v údajích v zadání najít vztah, který by umožnil jednu ze zbývajících veličin vyjádřit z ostatních. Tento bod provádíme, dokud v rovnici nezůstane jediná neznámá.
- Rovnici vyřešíme.
- Pokud je potřeba, odpočítáme další veličiny.

Jak poznat rovnici, která popisuje základní rys situace?

Jednoznačná odpověď neexistuje, ale většinou splňuje následující znaky:
- popisuje dění jako celek,
- pokud v události vystupuje více objektů (nebo více možných průběhů situace), obsahuje pojítko mezi nimi,
- vystupují v ní nějaké neznámé hodnoty.

Projdi všechny příklady této lekce a sestav výchozí rovnice pro jejich řešení. Poté se vrať k prvnímu příkladu a pokračuj v řešení od zapsané výchozí rovnice až ke konečné rovnici s jedinou neznámou. Dokončenou rovnici neřeš a přejdi k dalšímu příkladu.

Př. 1: Jarda známý sportovec jde se svojí těhotnou manželkou Anežkou na výlet. Aby si ho oba užili, rozloučí se Anežka s Jardou na nádraží a vyrazí vlakem, kterým pojede rychlostí 36 km/h 18 minut. Poté vystoupí a ihned se začne vracet po turistické značce vedoucí podél trati rychlostí 4 km/h zpátky domů přímo naproti Jardovi, který se po odjezdu vlaku s Anežkou rozběhne ve směru vlaku po stejné turistické trase rychlostí 16 km/h. Kdy a kde se s Anežkou na cestě potkají?

Ve chvíli, kdy se Jarda s Anežkou potká, urazí oba dohromady stejnou vzdálenost, jakou předtím Anežka ujela vlakem (a tuto vzdálenost můžeme z informací v zadání snadno vypočítat): $s_J + s_A = s_V$.

Vzdálenost uražená vlakem: $s = vt = 36 \cdot \frac{18}{60}\text{ km} = 36 \cdot \frac{3}{10}\text{ km} = 10,8\text{ km}$.

Dosadíme do rovnice vzorec $s = vt$: $v_J t_J + v_A t_A = 10,8$.

Dosadíme rychlosti: $16t_J + 4t_A = 10,8$.

Hledáme vztah mezi časy: Jarda vybíhá ihned po odjezdu vlaku, Anežka vychází až poté, co ji vlak 18 minut veze: $t_J = t_A + \frac{18}{60} = t_A + 0,3$

$16(t_A + 0,3) + 4t_A = 10,8$

Dále neřešíme, rovnice je sestavena.

Př. 2: Ondra vyrazil na vlakovou zastávku vzdálenou 3,5 km o pět minut později, než plánoval. Aby dorazil včas, musel svou rychlost zvýšit o 0,5 km/h. Jakou rychlostí plánoval na zastávku jít?

Můžeme vyjít z rovnice pro čas i z rovnice pro rychlost. Indexujeme *P* pro plánovaný pohyb, *S* pro skutečný pohyb.

Vycházíme z rovnice pro čas:

Ve skutečnosti vyrazil o 5 minut později, ale v cíli má být stejně: $t_P = t_S + \frac{5}{60} = t_S + \frac{1}{12}$.

Dosadíme $t = \frac{s}{v}$: $\frac{3,5}{v_P} = \frac{3,5}{v_S} + \frac{1}{12}$.

Skutečná rychlost je o 0,5 km/h vyšší než plánovaná: $v_S = v_P + 0,5$.

Dosadíme: $\frac{3,5}{v_P} = \frac{3,5}{v_P + 0,5} + \frac{1}{12}$.

Dále neřešíme, rovnice je sestavena.

Vycházíme z rovnice pro rychlost:

Skutečná rychlost je o 0,5 km/h vyšší než plánovaná: $v_S = v_P + 0,5$.

Dosadíme $v = \frac{s}{t}$: $\frac{3,5}{t_S} = \frac{3,5}{t_P} + 0,5$.

Ve skutečnosti vyrazil o 5 minut později, ale v cíli má být stejně: $t_P = t_S + \frac{5}{60} = t_S + \frac{1}{12}$.

Dosadíme: $\frac{3,5}{t_S} = \frac{3,5}{t_S + \frac{1}{12}} + 0,5$.

Dále neřešíme, rovnice je sestavena.

Př. 3: Z letiště vyletělo směrem na východ letadlo, o pět minut později ze stejného letiště vystartovalo stejné letadlo stejnou rychlostí směrem na jih. Půl hodiny po startu druhého letadla byla jejich vzdálenost rovna 640 km. Urči cestovní rychlost letadel.

Letadla se pohybují na východ a jih $\Rightarrow$ pohybují se v navzájem kolmých směrech $\Rightarrow$ vzdálenosti, které urazily od letiště, představují odvěsny pravoúhlého trojúhelníku s pravým úhlem v místě letiště a přeponou, kterou představuje vzájemná vzdálenost obou letadel $\Rightarrow$ základní rovnice pro dráhu: $s_1^2 + s_2^2 = 640^2$.

Dosadíme $s = vt$: $(v_1 t_1)^2 + (v_2 t_2)^2 = 640^2$

Platí: $v_1 = v_2 = v$: $(v t_1)^2 + (v t_2)^2 = 640^2$

Dosadíme za časy: $t_1 = \frac{35}{60} = \frac{7}{12}$, $t_2 = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$: $\left(v \cdot \frac{7}{12}\right)^2 + \left(v \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = 640^2$.

Dále neřešíme, rovnice je sestavena.

Př. 4: Zuzka je vášnivá cyklistka a velmi ráda závodí s vlakem, jehož trať vede vedle její oblíbené cyklostezky. Trasa má dvě části, v první cesta stoupá nahoru a Zuzka jede poloviční rychlostí, než je průměrná rychlost vlaku na celé trase. Druhou část tvoří klesání, na kterém se Zuzka pohybuje dokonce o 8 km/h rychleji než vlak. Jakou průměrnou rychlostí se na trase pohybuje vlak, jestliže do kopce Zuzka jede 15 minut a z kopce 20 minut a celou trasu stihne stejně rychle jako vlak?

Základní rovnice: trasa na kole i vlakem je stejně dlouhá: $s_1 + s_2 = s_v$.

Dosadíme do rovnice vzorec $s = vt$: $v_1 t_1 + v_2 t_3 = v_v t_v$.

Dosadíme časy ze zadání: $v_1 \frac{15}{60} + v_2 \frac{20}{60} = v_v \left(\frac{15+20}{60}\right)$.

$v_1 \cdot \frac{1}{4} + v_2 \cdot \frac{1}{3} = v_v \cdot \frac{35}{60} = v_v \cdot \frac{7}{12}$

Hledáme vztah mezi rychlostmi:

- Zuzka jede poloviční rychlostí, než je průměrná rychlost vlaku : $v_1 = \frac{v_v}{2}$,
- Zuzka se pohybuje dokonce o 8 km/h rychleji než vlak: $v_2 = v_v + 8$ km/h ,

Dosadíme: $v_v \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + (v_v + 8) \cdot \frac{1}{3} = v_v \cdot \frac{7}{12}$.

Dále neřešíme, rovnice je sestavena.

Př. 5: Jirka bobuje na kopci o délce 153 m. Dolů sviští rychlostí o 7,5 m/s vyšší, než jakou se hrabe do kopce, není proto divu, že cesta nahoru mu trvá o 85 sekund déle. Jakou rychlostí Jirka jezdí na bobech?

Můžeme vyjít z rovnice pro čas i z rovnice pro rychlost. Indexujeme *N* pro pohyb nahoru, *D* pro pohyb dolů.

Vycházíme z rovnice pro čas:

Cesta nahoru mu trvá o 85 sekund déle: $t_N = t_D + 85$.

Dosadíme $t = \frac{s}{v}$: $\frac{153}{v_N} = \frac{153}{v_D} + 85$.

Dolů sviští rychlostí o 7,5 m/s vyšší, než jakou se hrabe do kopce: $v_D = v_N + 7{,}5$.

Dosadíme: $\frac{153}{v_N} = \frac{153}{v_N + 7{,}5} + 85$.

Dále neřešíme, rovnice je sestavena.

Vycházíme z rovnice pro rychlost:

Dolů sviští rychlostí o 7,5 m/s vyšší, než jakou se hrabe do kopce: $v_D = v_N + 7{,}5$.

Dosadíme $v = \frac{s}{t}$: $\frac{153}{t_D} = \frac{153}{t_N} + 7{,}5$.

Cesta nahoru mu trvá o 85 sekund déle: $t_N = t_D + 85$.

Dosadíme: $\frac{153}{t_D} = \frac{153}{t_D + 85} + 7{,}5$.

Dále neřešíme, rovnice je sestavena.

Př. 6: Osobní a nákladní vlak vyjely na dvojkolejné trati proti sobě ze stanic vzdálených od sebe 12 km stálou rychlostí. Rychlejší osobní vlak přijel do druhé stanice o dvě minuty dříve než nákladní do první. Urči jejich rychlosti, jestliže na trati se minuly přesně po pěti minutách.

Indexujeme *O* pro osobní, *N* pro nákladní vlak.
Ve chvíli, kdy se vlaky na trati potkají, urazí dohromady celou vzdálenost mezi stanicemi:
$s_O + s_N = 12$.
Dosadíme do rovnice vzorec $s = vt$: $v_O t_O + v_N t_N = 12$.
Vlaky se minuly po pěti minutách $\Rightarrow$ $t_N = t_O = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$: $v_O \cdot \frac{1}{12} + v_N \cdot \frac{1}{12} = 12$.
Hledáme vztah mezi rychlostmi. V zadání žádný není, je uveden pouze čas, který vlakům trvalo urazit vzdálenost mezi stanicemi $\Rightarrow$ určíme z něj obě rychlosti:

- osobní vlak: $v_O = \frac{12}{t_O}$,
- nákladní vlak: $v_N = \frac{12}{t_N}$, rychlejší vlak přijede do stanice o dvě minuty dříve $\Rightarrow$
  $t_N = t_O + \frac{2}{60} = t_O + \frac{1}{30}$ $\Rightarrow$ $v_N = \frac{12}{t_O + \frac{1}{30}}$.

Dosadíme vyjádření rychlostí: $\frac{12}{t_O} \cdot \frac{1}{12} + \frac{12}{t_O + \frac{1}{30}} \cdot \frac{1}{12} = 12$.
Dále řešit nemusíme, rovnice je sestavena, ale požitek z krácení si ještě dopřejeme.

$$\frac{1}{t_O} + \frac{1}{t_O + \frac{1}{30}} = 12$$

Př. 7: Vodáci vyrazili na 12 km dlouhou poslední část svého putování rychlostí, kterou potřebovali jet, pokud chtěli dorazit do cílového kempu včas a odevzdat lodě. Po dvou kilometrech se převrátili a ztratili půl hodiny vyléváním vody, chytáním uplavaných věcí a převlékáním do suchého oblečení. Aby odevzdání lodí stihli, museli na zbytku trasy zvýšit rychlost plavby o 0,5 km/h. Jakou rychlostí vyrazili ráno na začátek cesty?

Můžeme vyjít z rovnice pro čas i z rovnice pro rychlost. Indexujeme *P* pro plánovaný pohyb, *S* pro skutečný pohyb.

Vycházíme z rovnice pro čas:
Plánovaná i skutečná cesta trvá stejně dlouho: $t_P = t_1 + 0,5 + t_2$ (t_1 čas potřebný k uražení prvních dvou kilometrů před nehodou, t_2 čas pro uražení zbytku cesty po přestávce).
Dosadíme $t = \frac{s}{v}$: $\frac{12}{v_P} = \frac{2}{v_p} + 0,5 + \frac{10}{v_S}$.
Skutečná rychlost je o 0,5 km/h vyšší než plánovaná: $v_S = v_P + 0,5$.

Dosadíme: $\frac{12}{v_P} = \frac{2}{v_p} + 0,5 + \frac{10}{v_P + 0,5}$.
Dále neřešíme, rovnice je sestavena.

Vycházíme z rovnice pro rychlost:
Skutečná rychlost je o 0,5 km/h vyšší než plánovaná: $v_S = v_P + 0,5$.

Dosadíme $v = \frac{s}{t}$: $\frac{10}{t_2} = \frac{12}{t_P} + 0,5$.

Čas potřebný k ujetí zbytku trasy po přestávce se rovná plánovanému času, bez první části trasy a přestávky: $t_2 = t_P - 0,5 - t_1$.

Dosadíme: $\frac{10}{t_P - 0,5 - t_1} = \frac{12}{t_P} + 0,5$. Zdánlivě jsme si nepomohli, protože se v rovnici objevila neznámá t_1, ale pokud si uvědomíme, že první část trasy se vodáci pohybovali plánovanou rychlostí a zároveň první část představuje šestinu celé trasy $\Rightarrow$ $t_1 = \frac{1}{6} t_P$.

Dosadíme: $\frac{10}{t_P - 0,5 - \frac{1}{6} t_P} = \frac{12}{t_P} + 0,5$.

Dále neřešíme, rovnice je sestavena.

Př. 8: Míra s Pavlou měli jít na výlet. Pavla však na poslední chvíli musela skočit do práce pomoci s rozbitým serverem a proto se dohodli, že Míra vyjde napřed a Pavla ho dohoní. na kole. Opravování serveru se nějak protáhlo a proto, když Pavla po třech hodinách konečně vyrazila za Mírou, měla takové zpoždění, že ho potkala až na zpáteční cestě 3 km od cíle, odkud se Míra vracel. Jak dlouhý byl celý výlet, jestliže Míra šel rychlostí 4,5 km, Pavla jela rychlostí 15 km/h a Míra v cíli ještě čekal půl hodiny, než se začal vracet?

Indexujeme *M* pro Míru, *P* pro Pavlu.
Ve chvíli, kdy se oba potkají, urazí Míra o 6 km víc (3 km do cíle a 3 km od něj na cestě zpátky): $s_P = s_M + 6$.

Dosadíme do rovnice vzorec $s = vt$: $v_P t_P = v_M t_M + 6$.

Dosadíme hodnoty rychlostí ze zadání: $15 \cdot t_P = 4,5 \cdot t_M + 6$.

Hledáme vztah mezi časy. Pavla se vydala na cestu o tři hodiny později, ale Míra půl hodiny čekal v cíli $\Rightarrow$ Míra se pohyboval o 2,5 hodiny déle: $t_M = t_P + 2,5$

Dosadíme: $15 \cdot t_P = 4,5 \cdot (t_P + 2,5) + 6$.

Dále řešit nemusíme, rovnice je sestavena.

Př. 9: Milan ujel na koloběžce 40 km, pak však píchnul a zbývajících 10 km musel ujít pěšky. Cesta pěšky mu trvala o hodinu méně než jízda na koloběžce. Kdyby šel Milan pěšky tak dlouho jako jel na koloběžce, ušel by stejnou vzdálenost, jakou by ujel na koloběžce za dobu, po kterou skutečně šel. Jak dlouho se vracel pěšky? Jak dlouho jel na koloběžce?

Vyjdeme z rovnice pro čas. Indexujeme *K* pro jízdu na koloběžce, *P* pro chůzi

pěšky. Cesta pěšky mu trvala o hodinu méně než jízda na koloběžce: $t_P = t_K - 1$.

Dosadíme $t = \frac{s}{v}$: $\frac{10}{v_P} = \frac{40}{v_K} - 1$.

Hledáme vztah mezi rychlostmi. Jediné místo, kde se může v zadání vyskytovat je nesrozumitelná věta: "Kdyby ...". Věta popisuje shodnost dvou vzdáleností.

Kdyby šel Milan pěšky tak dlouho jako jel na koloběžce: $s_1 = v_P t_K$.

ujel by na koloběžce za dobu, po kterou skutečně šel: $s_2 = v_K t_P$.

Zapíšeme rovnost: $v_P t_K = v_K t_P$.

Použijeme vyjádření časů pomocí vzorce $t = \frac{s}{v}$: $v_P \frac{40}{v_K} = v_K \frac{10}{v_P} \quad / \cdot v_K v_P$

$40 v_P^2 = 10 v_K^2 \quad / :10$

$4 \cdot v_P^2 = v_K^2 \quad / \sqrt{\ }$ Obě rychlosti jsou kladné, můžeme odmocnit

$v_K = 2 v_P$

Dosadíme do základní rovnice: $\frac{10}{v_P} = \frac{40}{2 v_P} - 1$.

Dále řešit nemusíme, rovnice je sestavena.

Shrnutí: Při řešení slovních úloh o pohybu vycházíme z rovnice, která vyjadřuje celkovou charakteristiku situace (mnohdy existuje více možností, kde začít).