4.2.22 Řešení soustav rovnic dosazovací metodou

Předpoklady: 040221

Př. 1: Vyřeš soustavy rovnic dosazovací metodou.

a) $\begin{matrix} 5x-2y=12 \\ x+3y=-1 \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} 3a+4b=6 \\ 5a+2b=-4 \end{matrix}$

a) $\begin{matrix} 5x-2y=12 \\ x+3y=-1 \end{matrix}$

V druhé rovnici se x vyskytuje pouze jedenkrát $\Rightarrow$ z druhé rovnice vyjádříme x a dosadíme do první rovnice.

$x+3y=-1 \quad /-3y$

$x=-1-3y$

Dosadíme do první rovnice.

$5(-1-3y)-2y=12$

$-5-15y-2y=12 \quad /+5$

$-17y=17 \quad /:(-17)$

$y=-1$

Dopočteme x: $x=-1-3y=-1-3(-1)=2$ $K=\{[2;-1]\}$

b) $\begin{matrix} 3a+4b=6 \\ 5a+2b=-4 \end{matrix}$

V druhé rovnici je dvojnásobek b, v první rovnici je čtyřnásobek b $\Rightarrow$ vyjádříme b z druhé rovnice a dosadíme do první (zlomek, který se objeví ve vyjádření ihned zmizí).

$5a+2b=-4 \quad /-5a$

$2b=-4-5a \quad /:2$

$b=\dfrac{-4-5a}{2}$

Dosadíme do první rovnice.

$3a+4\cdot\dfrac{-4-5a}{2}=6$

$3a-8-10a=6 \quad /+8$

$-7a=14 \quad /:(-7)$

$a=-2$

Dopočteme b: $b=\dfrac{-4-5a}{2}=\dfrac{-4-5\cdot(-2)}{2}=\dfrac{6}{2}=3$ $K=\{[2;3]\}$

Př. 2: Vyřeš libovolnou (pokud možno nejvýhodnější) variantou dosazovací metody soustavy rovnic:

a) $\begin{matrix} 3x - y = 5 \\ 6x - 2y = 8 \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} u + 4v = -1 \\ 3v - 4u = -34 \end{matrix}$ c) $\begin{matrix} 3x + 9y = 21 \\ -x - 3y = -7 \end{matrix}$

a) $\begin{matrix} 3x - y = 5 \\ 6x - 2y = 8 \end{matrix}$

V první rovnici se *y* vyskytuje pouze jedenkrát $\Rightarrow$ z první rovnice vyjádříme *y* a dosadíme do druhé rovnice.

$3x - y = 5 \quad / + y - 5$

$3x - 5 = y$

Dosadíme do druhé rovnice.

$6x - 2(3x - 5) = 8$

$6x - 6x + 10 = 8$

$10 = 8$ - podmínka, kterou není možné splnit $\Rightarrow$ $K = \emptyset$

b)

$u + 4v = -1$

$3v - 4u = -34$

V první rovnici se *u* vyskytuje pouze jedenkrát $\Rightarrow$ z první rovnice vyjádříme *u* a dosadíme do druhé rovnice.

$u + 4v = -1 \quad / - 4v$

$u = -1 - 4v$

Dosadíme do druhé rovnice.

$3v - 4(-1 - 4v) = -34$

$3v + 4 + 16v = -34 \quad / - 4$

$19v = -38 \quad / : 19$

$v = -2$

Dopočteme *u*: $u = -1 - 4v = -1 - 4(-2) = 7$ $K = \{[7; -2]\}$

c) $\begin{matrix} 3x + 9y = 21 \\ -x - 3y = -7 \end{matrix}$

V druhé rovnici se *x* vyskytuje pouze jedenkrát $\Rightarrow$ z druhé rovnice vyjádříme *x* a dosadíme do první rovnice.

$-x - 3y = -7 \quad / + x + 7$

$7 - 3y = x$

Dosadíme do první rovnice.

$3(7 - 3y) + 9y = 21$

$21 - 9y + 9y = 21$

$21 = 21 \quad / - 21$

$0 = 0$ $\Rightarrow$ rovnice má nekonečně mnoho řešení.

Co to znamená pro celou soustavu? Můžeme si sestavovat dvojice *x* a *y* úplně libovolně? Zkusíme například $x = 0;\ y = 1$.

$3 \cdot 0 + 9 \cdot 1 = 9 \Rightarrow$ nevyšlo $\Rightarrow$ zcela volně volit nemůžeme (máme podmínku $7 - 3y = x$ z vyjadřování) $\Rightarrow$ zkusíme postupovat tak, že si *y* zvolíme libovolně a *x* dopočteme tak, aby rovnice vyšla.

$y = 1 \Rightarrow x = 7 - 3y = 7 - 3 \cdot 1 = 4$

Ověříme dosazením $x = 4;\ y = 1$:

- $3x + 9y = 3 \cdot 4 + 9 \cdot 1 = 21$
- $-x - 3y = -1 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = -7$

Obě dosazení vyšla $\Rightarrow$ dvojice čísel $x = 4;\ y = 1$ je řešením soustavy.

$y = 0 \Rightarrow x = 7 - 3y = 7 - 3 \cdot 0 = 7$

Ověříme dosazením $x = 4;\ y = 1$:

- $3x + 9y = 3 \cdot 7 + 9 \cdot 0 = 21$
- $-x - 3y = -7 - 3 \cdot 0 = -7$

Obě dosazení vyšla $\Rightarrow$ dvojice čísel $x = 7;\ y = 0$ je řešením soustavy.

Zdá se, že za *y* můžeme zvolit libovolné číslo ($y \in R$), a *x* pak dopočítáme ze vztahu

$x = 7 - 3y \Rightarrow K = \{[7 - 3y;\ y], y \in R\}$

Pedagogická poznámka: Bod a) rozpozná správně většina žáků. V bodě c) pak většina dojde k tomu, že řešení je nekonečně mnoho, někteří i k tomu, že je získáme tím, že zvolíme *y* a dopočítáme *x*, ale výsledek správně nezapíše nikdo. Konec příkladu od rovnice $21 - 9y + 9y = 21$ při kontrolo doděláváme společně. Nechám každého ve třídě zvolit samostatně *y* dopočítat *x* a zkontrolovat, zda získaná čísla jsou správná.

Pokud soustava dvou rovnic o dvou neznámých představuje:

- dvě stejné podmínky, soustava má nekonečně mnoho řešení (hodnotu jedné neznámé volíme, hodnotu druhé dopočteme),
- dvě navzájem si odporující podmínky, soustava nemá žádné řešení,
- dvě navzájem nesouvisející podmínky, soustava má jedno řešení.

Př. 3: Pozorně si prohlédni předchozí soustavy. Je možné ze soustavy rovnic o dvou neznámých již na počátku poznat, že nebude mít řešení (řešení bude nekonečně mnoho)?

Rovnice v soustavě v bodu c) můžeme vydělit.

$3x + 9y = 21 \quad / : 3$ $\qquad$ $-x - 3y = -7 \quad / : (-1)$

$x + 3y = 7$ $\qquad$ $x + 3y = 7$

Získali jsme dvě úplně stejné rovnice $\Rightarrow$ pokud obě rovnice v soustavě představují stejnou podmínku, má soustava nekonečně mnoho řešení.

Zkusíme něco podobného u první soustavy.

$3x - y = 5$ $\qquad$ $6x - 2y = 8 \quad / : 2$

$3x - y = 4$

Levé strany obou rovnic jsou stejné (stejný výraz s neznámými), pravé strany (číslo) se liší $\Rightarrow$ dvě podmínky, které nemohou být splněny najednou $\Rightarrow$ soustava rovnic nemá řešení.

Př. 4: Vyřeš libovolnou (pokud možno nejvýhodnější) variantou dosazovací metody soustavy rovnic:

a) $\begin{aligned} 3x + y &= 2 \\ 2x - 2y &= 1 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 3a - 2b &= 7 \\ 4a + 3b &= 5 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 5c + 6d &= 1 \\ 4c - 7d &= 1 \end{aligned}$

a) $\begin{aligned} 3x + y &= 2 \\ 2x - 2y &= 1 \end{aligned}$

Z první rovnice vyjádříme y a osadíme do druhé.

$3x + y = 2 \quad / -3x$

$y = 2 - 3x$

Dosadíme.

$2x - 2(2 - 3x) = 1$

$2x - 4 + 6x = 1 \quad / +4$

$8x = 5 \quad / :8$

$x = \frac{5}{8}$

Dopočteme y: $y = 2 - 3x = 2 - 3 \cdot \frac{5}{8} = \frac{16}{8} - \frac{15}{8} = \frac{1}{8}$ $\qquad K = \left\{ \left[\frac{5}{8}; \frac{1}{8} \right] \right\}$

b) $\begin{aligned} 3a - 2b &= 7 \\ 4a + 3b &= 5 \end{aligned}$

Z první rovnice vyjádříme b a dosadíme do druhé.

$3a - 2b = 7 \quad / -2b - 7$

$3a - 7 = 2b \quad / :2$

$b = \frac{3a - 7}{2}$

Dosadíme.

$4a + 3 \cdot \frac{3a - 7}{2} = 5 \quad / \cdot 2$

$8a + 3(3a - 7) = 10$

$8a + 9a - 21 = 10 \quad / +21$

$17a = 31 \quad / :17$

$a = \frac{31}{17}$

Dopočteme b.

$b = \frac{3a - 7}{2} = \frac{3 \cdot \frac{31}{17} - 7}{2} = \frac{\frac{93 - 119}{17}}{2} = \frac{-\frac{26}{17}}{2} = -\frac{13}{17}$ $\qquad K = \left\{ \left[\frac{31}{17}; -\frac{13}{17} \right] \right\}$

c) $\begin{aligned} 5c + 6d &= 1 \\ 4c - 7d &= 1 \end{aligned}$

Z druhé rovnice vyjádříme c a dosadíme do druhé.

$4c - 7d = 1 \quad / +7d$

$4c = 1 + 7d \quad / :4$

$c = \frac{1+7d}{4}$

Dosadíme.

$5 \cdot \frac{1+7d}{4} + 6d = 1 \quad / \cdot 4$

$5(1+7d) + 24d = 4$

$5 + 35d + 24d = 4 \quad / -5$

$59d = -1 \quad / : 59$

$d = -\frac{1}{59}$

Dopočteme *c*.

$c = \frac{1+7d}{4} = \frac{1+7\cdot\left(-\frac{1}{59}\right)}{4} = \frac{\frac{59}{59} - \frac{7}{7}}{4} = \frac{\frac{52}{59}}{4} = \frac{4\cdot 13}{4\cdot 59} = \frac{13}{59}$ $\qquad K = \left\{\left[\frac{13}{59}; -\frac{1}{59}\right]\right\}$

Př. 5: Vyřeš soustavy rovnic.

a) $\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{2y}{3} &= -1 \\ x + \frac{y}{2} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$ $\qquad$ b) $\begin{aligned} 2(a+b) - 3a + 1 &= 3(a-1) + b + 3 \\ 3a - 2(b-1) &= 2(b-a) - 5 \end{aligned}$

Obě soustavy musíme nejdříve upravit.

a) $\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{2y}{3} &= -1 \quad / \cdot 6 \\ x + \frac{y}{2} &= \frac{1}{2} \quad / \cdot 2 \end{aligned}$

$3x + 4y = -6$

$2x + y = 1$

Vyjádříme z druhé rovnice *y* a dosadíme do první rovnice.

$2x + y = 1 \quad / -2x$

$y = 1 - 2x$

Dosadíme do první rovnice.

$3x + 4(1-2x) = -6$

$3x + 4 - 8x = -6 \quad / +6$

$10 - 5x = 0 \quad / +5x$

$10 = 5x \quad / : 5$

$x = 2$

Dopočteme *y*: $y = 1 - 2x = 1 - 2\cdot 2 = -3$ $\qquad K = \{[2; -3]\}$

b)

Upravíme první rovnici: $2(a+b) - 3a + 1 = 3(a-1) + b + 3$

$2a + 2b - 3a + 1 = 3a - 3 + b + 3$

$2b - a + 1 = 3a + b \quad / +a - 2b$

$1 = 4a - b$

Upravíme druhou rovnici: $3a-2(b-1)=2(b-a)-5$.

$3a-2(b-1)=2(b-a)-5$

$3a-2b+2=2b-2a-5 \qquad / -2b+2a-2$

$5a-4b=-7$

Získáme soustavu rovnic: $\begin{matrix} 4a-b=1 \\ 5a-4b=-7 \end{matrix}$.

Vyjádříme z první rovnice b a dosadíme do druhé rovnice.

$4a-b=1 \qquad / +b$

$4a=b+1 \qquad / -1$

$b=4a-1$

Dosadíme do druhé rovnice.

$5a-4(4a-1)=-7$

$5a-16a+4=-7 \qquad / -4$

$-11a=-11 \qquad / :(-11)$

$a=1$

Dopočteme b: $b=4a-1=4\cdot 1-1=3$. $\qquad K=\{[1;3]\}$

Pedagogická poznámka: Poslední příklad zůstane na domácí úkol.

Shrnutí: Pokud obě rovnice představují stejné podmínky má soustava nekonečně mnoho řešení, pokud rovnice představují navzájem si odporující podmínky, soustava žádné řešení nemá.