

4.2.22 Řešení soustav rovnic dosazovací metodou

Předpoklady: 040221

Př. 1: Vyřeš soustavy rovnic dosazovací metodou.

$$\text{a) } \begin{cases} 5x - 2y = 12 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3a + 4b = 6 \\ 5a + 2b = -4 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 5x - 2y = 12 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$$

V druhé rovnici se x vyskytuje pouze jedenkrát \Rightarrow z druhé rovnice vyjádříme x a dosadíme do první rovnice.

$$x + 3y = -1 \quad / -3y$$

$$x = -1 - 3y$$

Dosadíme do první rovnice.

$$5(-1 - 3y) - 2y = 12$$

$$-5 - 15y - 2y = 12 \quad / +5$$

$$-17y = 17 \quad / :(-17)$$

$$y = -1$$

$$\text{Dopočteme } x: x = -1 - 3y = -1 - 3(-1) = 2$$

$$K = \{[2; -1]\}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3a + 4b = 6 \\ 5a + 2b = -4 \end{cases}$$

V druhé rovnici je dvojnásobek b , v první rovnici je čtyřnásobek $b \Rightarrow$ vyjádříme b z druhé rovnice a dosadíme do první (zlomek, který se objeví ve vyjádření, ihned zmizí).

$$5a + 2b = -4 \quad / -5a$$

$$2b = -4 - 5a \quad / :2$$

$$b = \frac{-4 - 5a}{2}$$

Dosadíme do první rovnice.

$$3a + 4 \cdot \frac{-4 - 5a}{2} = 6$$

$$3a - 8 - 10a = 6 \quad / +8$$

$$-7a = 14 \quad / :(-7)$$

$$a = -2$$

$$\text{Dopočteme } b: b = \frac{-4 - 5a}{2} = \frac{-4 - 5 \cdot (-2)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$K = \{[-2; 3]\}$$

Př. 2: Vyřeš libovolnou (pokud možno nejvýhodnější) variantou dosazovací metody soustavy rovnic:

a) $3x - y = 5$
 $6x - 2y = 8$

b) $u + 4v = -1$
 $3v - 4u = -34$

c) $3x + 9y = 21$
 $-x - 3y = -7$

a) $3x - y = 5$
 $6x - 2y = 8$

V první rovnici se y vyskytuje pouze jedenkrát \Rightarrow z první rovnice vyjádříme y a dosadíme do druhé rovnice.

$$3x - y = 5 \quad / +y - 5$$

$$3x - 5 = y$$

Dosadíme do druhé rovnice.

$$6x - 2(3x - 5) = 8$$

$$6x - 6x + 10 = 8$$

$$10 = 8 \text{ - podmínka, kterou není možné splnit } \Rightarrow K = \emptyset$$

b)

$$u + 4v = -1$$

$$3v - 4u = -34$$

V první rovnici se u vyskytuje pouze jedenkrát \Rightarrow z první rovnice vyjádříme u a dosadíme do druhé rovnice.

$$u + 4v = -1 \quad / -4v$$

$$u = -1 - 4v$$

Dosadíme do druhé rovnice.

$$3v - 4(-1 - 4v) = -34$$

$$3v + 4 + 16v = -34 \quad / -4$$

$$19v = -38 \quad / :19$$

$$v = -2$$

$$\text{Dopočteme } u: u = -1 - 4v = -1 - 4(-2) = 7$$

$$K = \{[7; -2]\}$$

c) $3x + 9y = 21$
 $-x - 3y = -7$

V druhé rovnici se x vyskytuje pouze jedenkrát \Rightarrow z druhé rovnice vyjádříme x a dosadíme do první rovnice.

$$-x - 3y = -7 \quad / +x + 7$$

$$7 - 3y = x$$

Dosadíme do první rovnice.

$$3(7 - 3y) + 9y = 21$$

$$21 - 9y + 9y = 21$$

$$21 = 21 \quad / -21$$

$$0 = 0 \Rightarrow \text{rovnice má nekonečně mnoho řešení.}$$

Co to znamená pro celou soustavu? Můžeme si sestavovat dvojice x a y úplně libovolně?

Zkusíme například $x = 0$; $y = 1$.

$3 \cdot 0 + 9 \cdot 1 = 9 \Rightarrow$ nevyšlo \Rightarrow zcela volně volit nemůžeme (máme podmínku $7 - 3y = x$ z vyjadřování) \Rightarrow zkusíme postupovat tak, že si y zvolíme libovolně a x dopočteme tak, aby rovnice vyšla.

$$y = 1 \Rightarrow x = 7 - 3y = 7 - 3 \cdot 1 = 4$$

Ověříme dosazením $x = 4; y = 1$:

- $3x + 9y = 3 \cdot 4 + 9 \cdot 1 = 21$
- $-x - 3y = -1 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = -7$

Obě dosazení vyšla \Rightarrow dvojice čísel $x = 4; y = 1$ je řešením soustavy.

$$y = 0 \Rightarrow x = 7 - 3y = 7 - 3 \cdot 0 = 7$$

Ověříme dosazením $x = 4; y = 1$:

- $3x + 9y = 3 \cdot 7 + 9 \cdot 0 = 21$
- $-x - 3y = -7 - 3 \cdot 0 = -7$

Obě dosazení vyšla \Rightarrow dvojice čísel $x = 7; y = 0$ je řešením soustavy.

Zdá se, že za y můžeme zvolit libovolné číslo ($y \in R$) a x pak dopočítáme ze vztahu

$$x = 7 - 3y \Rightarrow K = \{[7 - 3y; y], y \in R\}$$

Pedagogická poznámka: Bod a) rozpozná správně většina žáků. V bodě c) pak většina dojde k tomu, že řešení je nekonečně mnoho, někteří i k tomu, že je získáme tím, že zvolíme y a dopočítáme x , ale výsledek správně nezapiše nikdo. Konec příkladu od rovnice $21 - 9y + 9y = 21$ při kontrole doděláváme společně. Nechám každého ve třídě zvolit samostatně y , dopočítat x a zkontrolovat, zda získaná čísla jsou správná.

Pokud soustava dvou rovnic o dvou neznámých představuje:

- dvě stejné podmínky, soustava má nekonečně mnoho řešení (hodnotu jedné neznámé volíme, hodnotu druhé dopočteme),
- dvě navzájem si odporující podmínky, soustava nemá žádné řešení,
- dvě navzájem nesouvisějící podmínky, soustava má jedno řešení.

Př. 3: Pozorně si prohlédni předchozí soustavy. Je možné ze soustavy rovnic o dvou neznámých již na počátku poznat, že nebude mít řešení (řešení bude nekonečně mnoho)?

Rovnice v soustavě v bodu c) můžeme vydělit.

$$3x + 9y = 21 \quad / : 3 \qquad -x - 3y = -7 \quad / : (-1)$$

$$x + 3y = 7 \qquad x + 3y = 7$$

Získali jsme dvě úplně stejné rovnice \Rightarrow pokud obě rovnice v soustavě představují stejnou podmínku, má soustava nekonečně mnoho řešení.

Zkusíme něco podobného u první soustavy.

$$3x - y = 5 \qquad 6x - 2y = 8 \quad / : 2$$
$$3x - y = 4$$

Levé strany obou rovnic jsou stejné (stejný výraz s neznámými), pravé strany (číslo) se liší \Rightarrow dvě podmínky, které nemohou být splněny najednou \Rightarrow soustava rovnic nemá řešení.

Př. 4: Vyřeš libovolnou (pokud možno nejvýhodnější) variantou dosazovací metody soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} \text{a) } & 3x + y = 2 \\ & 2x - 2y = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & 3a - 2b = 7 \\ & 4a + 3b = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & 5c + 6d = 1 \\ & 4c - 7d = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } & 3x + y = 2 \\ & 2x - 2y = 1 \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme y a dosadíme do druhé.

$$3x + y = 2 \quad / -3x$$

$$y = 2 - 3x$$

Dosadíme.

$$2x - 2(2 - 3x) = 1$$

$$2x - 4 + 6x = 1 \quad / +4$$

$$8x = 5 \quad / :8$$

$$x = \frac{5}{8}$$

$$\text{Dopočteme } y: y = 2 - 3x = 2 - 3 \cdot \frac{5}{8} = \frac{16}{8} - \frac{15}{8} = \frac{1}{8}$$

$$K = \left\{ \left[\frac{5}{8}; \frac{1}{8} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & 3a - 2b = 7 \\ & 4a + 3b = 5 \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme b a dosadíme do druhé.

$$3a - 2b = 7 \quad / -2b - 7$$

$$3a - 7 = 2b \quad / :2$$

$$b = \frac{3a - 7}{2}$$

Dosadíme.

$$4a + 3 \cdot \frac{3a - 7}{2} = 5 \quad / \cdot 2$$

$$8a + 3(3a - 7) = 10$$

$$8a + 9a - 21 = 10 \quad / +21$$

$$17a = 31 \quad / :17$$

$$a = \frac{31}{17}$$

Dopočteme b .

$$b = \frac{3a - 7}{2} = \frac{3 \cdot \frac{31}{17} - 7}{2} = \frac{\frac{93 - 119}{17}}{2} = \frac{-26}{2} = -\frac{13}{17}$$

$$K = \left\{ \left[\frac{31}{17}; -\frac{13}{17} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & 5c + 6d = 1 \\ & 4c - 7d = 1 \end{aligned}$$

Z druhé rovnice vyjádříme c a dosadíme do druhé.

$$4c - 7d = 1 \quad / +7d$$

$$4c = 1 + 7d \quad /:4$$

$$c = \frac{1 + 7d}{4}$$

Dosadíme.

$$5 \cdot \frac{1 + 7d}{4} + 6d = 1 \quad / \cdot 4$$

$$5(1 + 7d) + 24d = 4$$

$$5 + 35d + 24d = 4 \quad / -5$$

$$59d = -1 \quad /:59$$

$$d = -\frac{1}{59}$$

Dopočteme c .

$$c = \frac{1 + 7d}{4} = \frac{1 + 7 \cdot \left(-\frac{1}{59}\right)}{4} = \frac{\frac{59}{59} - \frac{7}{59}}{4} = \frac{\frac{52}{59}}{4} = \frac{4 \cdot 13}{4 \cdot 59} = \frac{13}{59}$$

$$K = \left\{ \left[\frac{13}{59}; -\frac{1}{59} \right] \right\}$$

Př. 5: Vyřeš soustavu rovnic.

$$\text{a) } \frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1$$

$$x + \frac{y}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } 2(a + b) - 3a + 1 = 3(a - 1) + b + 3$$

$$3a - 2(b - 1) = 2(b - a) - 5$$

Obě soustavy musíme nejdříve upravit.

$$\text{a) } \frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1 \quad / \cdot 6$$

$$x + \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \quad / \cdot 2$$

$$3x + 4y = -6$$

$$2x + y = 1$$

Vyjádříme z druhé rovnice y a dosadíme do první rovnice.

$$2x + y = 1 \quad / -2x$$

$$y = 1 - 2x$$

Dosadíme do první rovnice.

$$3x + 4(1 - 2x) = -6$$

$$3x + 4 - 8x = -6 \quad / +6$$

$$10 - 5x = 0 \quad / +5x$$

$$10 = 5x \quad /:5$$

$$x = 2$$

Dopočteme y : $y = 1 - 2x = 1 - 2 \cdot 2 = -3$

$$K = \{[2; -3]\}$$

b)

Upravíme první rovnici: $2(a + b) - 3a + 1 = 3(a - 1) + b + 3$

$$2a + 2b - 3a + 1 = 3a - 3 + b + 3$$

$$2b - a + 1 = 3a + b \quad / +a - 2b$$

$$1 = 4a - b$$

Upravíme druhou rovnici: $3a - 2(b-1) = 2(b-a) - 5$.

$$3a - 2(b-1) = 2(b-a) - 5$$

$$3a - 2b + 2 = 2b - 2a - 5 \quad | -2b + 2a - 2$$

$$5a - 4b = -7$$

Získáme soustavu rovnic:
$$\begin{cases} 4a - b = 1 \\ 5a - 4b = -7 \end{cases}$$

Vyjádříme z první rovnice b a dosadíme do druhé rovnice.

$$4a - b = 1 \quad | +b$$

$$4a = b + 1 \quad | -1$$

$$b = 4a - 1$$

Dosadíme do druhé rovnice.

$$5a - 4(4a - 1) = -7$$

$$5a - 16a + 4 = -7 \quad | -4$$

$$-11a = -11 \quad | :(-11)$$

$$a = 1$$

Dopočteme b : $b = 4a - 1 = 4 \cdot 1 - 1 = 3$.

$$K = \{[1; 3]\}$$

Pedagogická poznámka: Poslední příklad zůstane na domácí úkol.

Shrnutí: Pokud obě rovnice představují stejné podmínky, má soustava nekonečně mnoho řešení, pokud rovnice představují navzájem si odporující podmínky, soustava žádné řešení nemá.