

4.2.21 Srovnávací metoda řešení soustavy dvou rovnic

Předpoklady: 040220

Př. 1: Vyřeš soustavy rovnic.

a)
$$\begin{aligned} 3x - y &= 9 \\ 5x + 2y &= 26 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 5x + 4y &= 6 \\ 3x - 4y &= 10 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 3a - 2b &= 2 \\ 3a + 5b &= 3 \end{aligned}$$

a)
$$\begin{aligned} 3x - y &= 9 \\ 5x + 2y &= 26 \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme y a dosadíme do druhé.

$$3x - y = 9 \quad / +y - 9$$

$$3x - 9 = y$$

Dosadíme.

$$5x + 2(3x - 9) = 26$$

$$5x + 6x - 18 = 26$$

$$11x - 18 = 26 \quad / +18$$

$$11x = 44 \quad / :11$$

$$x = 4$$

Dopočteme y : $y = 3x - 9 = 3 \cdot 4 - 9 = 3$

$$K = \{[4; 3]\}$$

b)
$$\begin{aligned} 5x + 4y &= 6 \\ 3x - 4y &= 10 \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme $4y$ a dosadíme do druhé (mohli bychom to udělat i obráceně).

$$5x + 4y = 6 \quad / -5x$$

$$4y = 6 - 5x$$

Dosadíme.

$$3x - (6 - 5x) = 10$$

$$3x - 6 + 5x = 10 \quad / +6$$

$$8x = 16 \quad / :8$$

$$x = 2$$

Dopočteme y : $4y = 6 - 5x = 6 - 5 \cdot 2 = -4 \Rightarrow y = -1$

$$K = \{[2; -1]\}$$

c)
$$\begin{aligned} 3a - 2b &= 2 \\ 3a + 5b &= 3 \end{aligned}$$

Z druhé rovnice vyjádříme $3a$ a dosadíme do první rovnice (nebo obráceně).

$$3a + 5b = 3 \quad / -5b$$

$$3a = 3 - 5b$$

Dosadíme do první rovnice.

$$3 - 5b - 2b = 2 \quad / -3$$

$$-7b = -1 \quad / :(-7)$$

$$b = \frac{1}{7}$$

$$\text{Dopočteme } a: 3a = 3 - 5b = 3 - 5 \cdot \frac{1}{7} = 3 - \frac{5}{7} = \frac{16}{7} \quad /:3$$

$$x = \frac{16}{21}$$

$$K = \left\{ \left[\frac{16}{21}; \frac{1}{7} \right] \right\}$$

Př. 2: Prostuduj řešení soustavy rovnic srovnávací metodou.

- Popiš slovně postup řešení soustavy rovnic při použití srovnávací metody.
- Projdi soustavy z příkladu 1 a najdi ty, které by daly snadno řešit srovnávací metodou.
- U jakých soustav je využití srovnávací metody nejvýhodnější.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 2x - 3y &= 3 \end{aligned}$$
 srovnávací metodou.

Z první rovnice: $x + 2y = 5 \Rightarrow x = 5 - 2y$.

Z druhé rovnice: $2x - 3y = 3 \Rightarrow 2x = 3 + 3y \Rightarrow x = \frac{3 + 3y}{2}$.

$$5 - 2y = \frac{3 + 3y}{2} \quad / \cdot 2$$

$$10 - 4y = 3 + 3y \quad / +4y - 3$$

$$7 = 7y \quad /:7$$

$$y = 1$$

$$\text{Dopočteme } x: x = 5 - 2y = 5 - 2 \cdot 1 = 3 \quad K = \{[3; 1]\}$$

a) Řešení soustavy rovnic srovnávací metodou:

- Z obou rovnic si vyjádříme stejný výraz (stejnou neznámou) (v naší ukázce $x = 5 - 2y$ a $x = 3y$).
- Protože vyjádřené výrazy se rovnají ($x = x$), musí se rovnat i pravé strany obou vyjádření (v ukázce $5 - 2y = 3y$), čímž získáme obyčejnou rovnici o jedné neznámé.
- Získanou rovnici vyřešíme.
- Pomocí jednoho z vyjádření dopočteme druhou neznámou.

b) V příkladu 1 by se srovnávací metodou snadno řešily soustavy v bodech b) a c), protože v obou případech obě rovnice soustavy obsahují stejný výraz (v bodě b) $4y$, v bodě c) $3a$).

c) Nejvýhodnější je použití srovnávací metody u soustav, které v obou rovnicích obsahují stejný výraz z jednou neznámou.

Při řešení soustavy dvou rovnic srovnávací metodou postupujeme v následujících krocích:

- Z obou rovnic si vyjádříme stejný výraz (stejnou neznámou) (v naší ukázce $x = 5 - 2y$ a $x = 3y$).
- Protože vyjádřené výrazy se rovnají (v naší ukázce $x = x$), musí se rovnat i pravé strany obou vyjádření (v ukázce $5 - 2y = 3y$), čímž získáme obyčejnou rovnici o jedné neznámé.

- Získanou rovnici vyřešíme.
- Pomocí jednoho z vyjádření dopočteme druhou neznámou.

Př. 3: Vyřeš soustavy rovnic z příkladu 1 srovnávací metodou.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \begin{array}{l} 3x - y = 9 \\ 5x + 2y = 26 \end{array} & \text{b)} & \begin{array}{l} 5x + 4y = 6 \\ 3x - 4y = 10 \end{array} & \text{c)} & \begin{array}{l} 3a - 2b = 2 \\ 3a + 5b = 3 \end{array} \end{array}$$

$$\text{a)} \quad \begin{array}{l} 3x - y = 9 \\ 5x + 2y = 26 \end{array}$$

Z obou rovnic vyjádříme y .

$$\begin{array}{ll} 3x - y = 9 & / +y - 9 \\ 3x - 9 = y & \end{array} \quad \begin{array}{ll} 5x + 2y = 26 & / -5x \\ 2y = 26 - 5x & / :2 \\ y = \frac{26 - 5x}{2} & \end{array}$$

$$\text{Obě vyjádření srovnáme: } 3x - 9 = \frac{26 - 5x}{2} \quad / \cdot 2$$

$$6x - 18 = 26 - 5x \quad / +5x + 18$$

$$11x = 44 \quad / :4$$

$$x = 4$$

$$\text{Dopočteme } y: y = 3x - 9 = 3 \cdot 4 - 9 = 3 \quad K = \{[4; 3]\}$$

$$\text{b)} \quad \begin{array}{l} 5x + 4y = 6 \\ 3x - 4y = 10 \end{array}$$

Z obou rovnic vyjádříme $4y$.

$$\begin{array}{ll} 5x + 4y = 6 & / -5x \\ 4y = 6 - 5x & \end{array} \quad \begin{array}{ll} 3x - 4y = 10 & / +4y - 10 \\ 3x - 10 = 4y & \end{array}$$

$$\text{Obě vyjádření srovnáme: } 6 - 5x = 3x - 10 \quad / +10 + 5x$$

$$8x = 16 \quad / :8$$

$$x = 2$$

$$\text{Dopočteme } y: 4y = 6 - 5x = 6 - 5 \cdot 2 = -4 \Rightarrow y = -1 \quad K = \{[2; -1]\}$$

$$\text{c)} \quad \begin{array}{l} 3a - 2b = 2 \\ 3a + 5b = 3 \end{array}$$

Z obou rovnic vyjádříme $3a$.

$$\begin{array}{ll} 3a - 2b = 2 & / +2b \\ 3a = 2 + 2b & \end{array} \quad \begin{array}{ll} 3a + 5b = 3 & / -5b \\ 3a = 3 - 5b & \end{array}$$

$$\text{Obě vyjádření srovnáme: } 2 + 2b = 3 - 5b \quad / +5b - 2$$

$$7b = 1 \quad / :7$$

$$b = \frac{1}{7}$$

$$\text{Dopočteme } a: 3a = 3 - 5b = 3 - 5 \cdot \frac{1}{7} = 3 - \frac{5}{7} = \frac{16}{7} \quad / :3$$

$$x = \frac{16}{21}$$

$$K = \left\{ \left[\frac{16}{21}; \frac{1}{7} \right] \right\}$$

Př. 4: Vyřeš soustavy rovnic srovnávací metodou.

a)
$$\begin{aligned} 2x - y &= -4 \\ 5x + y &= -3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x + 7y &= 4 \\ 2x - 3y &= 6 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} -3x - y &= -4 \\ 6x + 2y &= 8 \end{aligned}$$

a)
$$\begin{aligned} 2x - y &= -4 \\ 5x + y &= -3 \end{aligned}$$

Z obou rovnic vyjádříme y .

$$2x - y = -4 \quad / -y + 4$$

$$2x + 4 = y$$

$$5x + y = -3 \quad / -5x$$

$$y = -3 - 5x$$

Obě vyjádření srovnáme: $2x + 4 = -3 - 5x \quad / +5x - 4$

$$7x = -7 \quad / : 7$$

$$x = -1$$

Dopočteme y : $y = -3 - 5x = -3 - 5 \cdot (-1) = 2$

$$K = \{[-1; 2]\}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x + 7y &= 4 \\ 2x - 3y &= 6 \end{aligned}$$

Z obou rovnic vyjádříme $2x$.

$$2x + 7y = 4 \quad / -7y$$

$$2x = 4 - 7y$$

$$2x - 3y = 6 \quad / +3y$$

$$2x = 6 + 3y$$

Obě vyjádření srovnáme: $4 - 7y = 6 + 3y \quad / +7y - 6$

$$-2 = 10y \quad / : 10$$

$$y = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5} = -0,2$$

Dopočteme x : $2x = 6 + 3y = 6 + 3(-0,2) = 6 - 0,6 = 5,4$

$$2x = 5,4 \quad / : 2$$

$$x = 2,7$$

$$K = \{[2,7; -0,2]\}$$

c)
$$\begin{aligned} -3x - y &= -4 \\ 6x + 2y &= 8 \end{aligned}$$

Z obou rovnic vyjádříme y .

$$-3x - y = -4 \quad / +y + 4$$

$$4 - 3x = y$$

$$6x + 2y = 8 \quad / -6x$$

$$2y = 8 - 6x \quad / : 2$$

$$y = 4 - 3x$$

Obě vyjádření jsou shodná (po srovnání získáme rovnici $0 = 0$) \Rightarrow obě rovnice představují stejnou podmínku \Rightarrow soustava má nekonečně mnoho řešení:

- x libovolně volíme,
- y dopočteme podle vztahu $y = 4 - 3x$

$$\Rightarrow K = \{[x; 4 - 3x]; x \in R\}$$

Př. 5: Vyřeš soustavu rovnic.

$$a) \quad \frac{3}{y+1} = \frac{2}{x-2}$$

$$2(x+y) = 3(x-y) + 6$$

$$b) \quad (x-1)^2 + 2y = (x+3)^2$$

$$2x + (y+1)^2 = (y-2)(y+1)$$

Obě soustavy musíme nejdříve upravit.

$$a) \quad \frac{3}{y+1} = \frac{2}{x-2}, \quad y \neq -1; x \neq 2$$

$$2(x+y) = 3(x-y) + 6$$

$$\frac{3}{y+1} = \frac{2}{x-2} \quad / (y+1)(x-2)$$

$$3(x-2) = 2(y+1)$$

$$3x - 6 = 2y + 2 \quad / -2y + 6$$

$$3x - 2y = 8$$

$$2(x+y) = 3(x-y) + 6$$

$$2x + 2y = 3x - 3y + 6 \quad / -2x - 2y - 6$$

$$-6 = x - 5y$$

Z druhé rovnice vyjádříme x a dosadíme do první.

$$-6 = x - 5y \quad / +5y$$

$$x = 5y - 6$$

Dosadíme.

$$3(5y - 6) - 2y = 8$$

$$15y - 18 - 2y = 8 \quad / +18$$

$$13y = 26 \quad / :13$$

$$y = 2$$

$$\text{Dopočteme } x: x = 5y - 6 = 5 \cdot 2 - 6 = 10 - 6 = 4$$

$$K = \{[4; 2]\}$$

$$b) \quad (x-1)^2 + 2y = (x+3)^2$$

$$2x + (y+1)^2 = (y-2)(y+1)$$

$$(x-1)^2 + 2y = (x+3)^2$$

$$2x + (y+1)^2 = (y-2)(y+1)$$

$$x^2 - 2x + 1 + 2y = x^2 + 6x + 9 \quad / -x^2 + 2x$$

$$2x + y^2 + 2y + 1 = y^2 + y - 2y - 2 \quad / -y^2 + y$$

$$1 + 2y = 8x + 9 \quad / -2y - 9$$

$$2x + 3y + 1 = -2 \quad / -1$$

$$8x - 2y = -8 \quad / :2$$

$$2x + 3y = -3$$

$$4x - y = -4$$

Z první rovnice vyjádříme y a dosadíme do druhé.

$$4x - y = -4 \quad / +y + 4$$

$$y = 4x + 4$$

Dosadíme.

$$2x + 3(4x + 4) = -3$$

$$2x + 12x + 12 = -3 \quad / -12$$

$$14x = -15 \quad / :14$$

$$x = -\frac{15}{14}$$

$$y = 4 \cdot \left(-\frac{15}{14}\right) + 4 = -\frac{30}{7} + \frac{28}{7} = -\frac{2}{7}$$

$$K = \left\{ \left[-\frac{15}{14}; -\frac{2}{7} \right] \right\}$$

Př. 6: Zkontroluj na dva výpočty pomocí kalkulačky řešení bodu b) v předchozím příkladu.

Shrnutí: Ve srovnávací metodě, vyjádříme z obou rovnic stejný výraz a z pravých stran tohoto vyjádření sestavíme rovnici o jedné neznámé.