

4.2.24 Sčítací metoda

Předpoklady: 040223

Pedagogická poznámka: S řešením prvního příkladu příliš dlouho nečekám (druhý příklad je spíše ukázkou toho, jak je možné řešit složitější příklady než reálným zadáním, u kterého bych očekával, že ho někdo vyřeší).

Př. 1: Vyřeš bez použití rovnic.

Při použití taxi platíme nástupní taxu (poplatek za to, že taxi zastavilo a nechalo nás nastoupit) a platbu za každý ujetý kilometr. Petr ujel taxíkem 8 km a zaplatil 138 Kč, Jirka ujel 3 km a zaplatil 68 Kč. Jaká je nástupní taxa, kolik stojí 1 km?

138 Kč	...	8 km a nástup
68 Kč	...	3 km a nástup
$138 - 68 = 70$ Kč	...	5 km (bez nástupu)
$70 : 5 = 14$ Kč	...	1 km
$68 - 3 \cdot 14 = 26$ Kč		nástupní taxa.

Nástupní taxa je 26 Kč, za 1 km se platí 14 km.

Př. 2: Vyřeš bez použití rovnic.

Dvě kila banánů a tři kila jablek stojí dohromady 122 Kč. Tři kila banánů a dvě kila jablek stojí 128 Kč. Kolik stojí kilo banánů?

122 Kč	...	2 kg banány, 3 kg jablka
128 Kč	...	3 kg banány, 2 kg jablka
$128 + 122 = 250$ Kč	...	5 kg banány, 5 kg jablka
$250 : 5 = 50$ Kč	...	1 kg banány, 1 kg jablka
$2 \cdot 50 = 100$ Kč	...	2 kg banány, 2 kg jablka
$122 - 100 = 22$ Kč	...	0 kg banány, 1 kg jablka
$128 - 100 = 28$ Kč	...	1 kg banány, 0 kg jablka

1 kg banánů stojí 28 Kč, 1 kg jablek 22 Kč.

Pedagogická poznámka: Do sešitu se přepisuje do rovnic pouze první příklad, přepis druhého příkladu promítám projektorem.

Př. 3: Dopln k řešení předchozích příkladů přepis do rovnic.

138 Kč	...	8 km a nástup	...	$8k + n = 138$
68 Kč	...	3 km a nástup	...	$3k + n = 68$
$138 - 68 = 70$ Kč	...	5 km (bez nástupu)	...	$8k + n - (3k + n) = 138 - 68$
				$5k = 70$
$70 : 5 = 14$ Kč	...	1 km	...	$k = 14$
$68 - 3 \cdot 14 = 26$ Kč		nástupní taxa.	...	$n = 26$

Nástupní taxa je 26 Kč, za 1 km se platí 14 km.

Příklad s ovocem

122 Kč	...	2 kg banány, 3 kg jablka	...	$2b + 3j = 122$
128 Kč	...	3 kg banány, 2 kg jablka	...	$3b + 2j = 128$
$128 + 122 = 250$ Kč	...	5 kg banány, 5 kg jablka		$2b + 3j + 3b + 2j = 122 + 128$ $5b + 5j = 250$
$250 : 5 = 50$ Kč	...	1 kg banány, 1 kg jablka	...	$b + j = 50$
$2 \cdot 50 = 100$ Kč	...	2 kg banány, 2 kg jablka	...	$2b + 2j = 100$
$122 - 100 = 22$ Kč	...	0 kg banány, 1 kg jablka		$2b + 3j - (2b + 2j) = 122 - 100$ $j = 22$
$128 - 100 = 28$ Kč	...	1 kg banány, 0 kg jablka		$3b + 2j - (2b + 2j) = 128 - 100$ $b = 28$

1 kg banánů stojí 28 Kč, 1 kg jablek 22 Kč.

Oba předchozí příklady jsou ukázkou sčítací metody řešení soustavy dvou rovnic (přestože jsme ve skutečnosti odčítali). Přehledněji bychom mohli postup zapsat takto:

$$8k + n = 138$$

$$\underline{3k + n = 68}$$

$$8k + n - (3k + n) = 138 - 68$$

$$5k = 70 \quad / : 5$$

$$k = 14$$

Dopočteme n : $3k + n = 3 \cdot 14 + n = 68$.

$$42 + n = 68 \quad / -42$$

$$n = 26$$

Proč můžeme od jedné rovnice odečíst druhou?

K rovnici můžeme přičítat (odečítat) libovolné číslo. Odečtením rovnice $3k + n = 68$, vlastně odečítáme od první rovnice číslo 68 (na pravé straně je přímo napsané, na levé straně je zapsané složitě jako $3k + n$).

Mnoho lidí se mylně domnívá, že sečtením jsme ze dvou rovnic udělali jednu. Není to pravda, jednu ze dvou původních rovnic potřebujeme, abychom dokázali vypočítat druhou neznámou. Proto se často (hlavně u soustav více rovnic o více neznámých) píší pořád dvě rovnice.

$$8k + n = 138$$

$$\underline{3k + n = 68}$$

$$3k + n = 68$$

$$8k + n - (3k + n) = 138 - 68$$

$$\underline{3k + n = 68}$$

$$\underline{5k = 70}$$

My to v tomto okamžiku dělat nebudeme, ale příští rok u soustav s větším počtem rovnic i neznámých nám nic jiného nezbude.

V běžném zápisu se prostřední krok vynechává. Sčítání (odečítání) koeficientů před neznámými je díky zápisu pod sebe velmi pohodlné. Často se před rovnicí vzniklou sčítáním

píše, jakým způsobem jsme ji získali (v našem případě tím, že jsme od první rovnice odečetli druhou).

$$8k + n = 138$$

$$3k + n = 68$$

$$\begin{array}{r} \text{[1]} - \text{[2]} \\ \hline 5k = 70 \quad / :5 \end{array}$$

$$k = 14$$

Dopočteme n : $3k + n = 3 \cdot 14 + n = 68$.

$$42 + n = 68 \quad / -42$$

$$n = 26$$

Př. 4: Vypočti sčítací metodou soustavy rovnic.

a)
$$\begin{array}{l} 2x + y = 4 \\ x - y = 1 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} x - 3y = 7 \\ x + 2y = 2 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{l} 3a - 2b = 1 \\ 5a + 2b = 1 \end{array}$$

a)
$$\begin{array}{l} 2x + y = 4 \\ x - y = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{[1]} + \text{[2]} \\ \hline 3x = 5 \end{array}$$

$$x = \frac{5}{3}$$

$$x - y = 1 \quad / +y -1$$

$$y = x - 1 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$$

$$K = \left\{ \left[\frac{5}{3}; \frac{2}{3} \right] \right\}$$

b)
$$\begin{array}{l} x - 3y = 7 \\ x + 2y = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{[2]} - \text{[1]} \\ \hline 5y = -5 \end{array}$$

$$y = -1$$

$$x - 3y = 7 \quad / +3y$$

$$x = 7 + 3y = 7 + 3(-1) = 4$$

$$K = \{[4; -1]\}$$

c)
$$\begin{array}{l} 3a - 2b = 1 \\ 5a + 2b = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{[1]} + \text{[2]} \\ \hline 8a = 2 \end{array}$$

$$a = \frac{1}{4}$$

$$3a - 2b = 1 \quad / +2b -1$$

$$2b = 3a - 1 = 3 \cdot \frac{1}{4} - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

$$b = -\frac{1}{8}$$

$$K = \left\{ \left[\frac{1}{4}; -\frac{1}{8} \right] \right\}$$

Pedagogická poznámka: Následující poznámku značná část žáků nepotřebuje, násobení rovnic je napadne a z příkladu 4 přejdou plynule na příklad 5. Poznámku proto do sešitu nepíšeme, jen ji ukáži u tabule.

Co se soustavou $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$?

Sečtením ani odečtením žádná neznámá nezmizí \Rightarrow jednu z rovnic vynásobíme tak, aby po sečtení jedna z neznámých zmizela.

$$\begin{array}{r} 3x + 2y = 0 \\ 2x + y = -1 \quad / \cdot 2 \\ \hline 3x + 2y = 0 \\ 4x + 2y = -2 \\ \hline 3x + 2y = 0 \\ \quad x = -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \cdot (-2) + y = -1 \quad / +4 \\ y = 3 \end{array} \quad K = \{[-2; 3]\}$$

Př. 5: Vypočti soustavy rovnic sčítací metodou.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} 5x - 2y = -11 \\ 3x + 4y = 9 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 2a + 5b = 7 \\ 6a - 3b = 3 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 3a - 2b = 12 \\ 5a + 7b = -11 \end{cases} \end{array}$$

$$\text{a) } \begin{array}{r} 5x - 2y = -11 \quad / \cdot 2 \\ 3x + 4y = 9 \\ \hline 10x - 4y = -22 \\ 3x + 4y = 9 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{[1]} + \text{[2]} \quad 13x = -13 \\ x = -1 \\ 3x + 4y = 9 \quad / -3x \\ 4y = 9 - 3x = 9 - 3(-1) = 12 \\ y = 3 \end{array} \quad K = \{[-1; 3]\}$$

$$\text{b) } \begin{array}{r} 2a + 5b = 7 \quad / \cdot 3 \\ 6a - 3b = 3 \\ \hline 6a + 15b = 21 \\ 6a - 3b = 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{[1]} - \text{[2]} \quad 18b = 18 \\ b = 1 \\ 6a - 3b = 3 \quad / +3b \\ 6a = 3 + 3b = 3 + 3 \cdot 1 = 6 \\ a = 1 \end{array} \quad K = \{[1; 1]\}$$

$$c) \quad 3a - 2b = 12$$

$$5a + 7b = -11$$

Je třeba vynásobit obě rovnice.

$$3a - 2b = 12 \quad / \cdot 5$$

$$5a + 7b = -11 \quad / \cdot 3$$

$$\hline 15a - 10b = 60$$

$$15a + 21b = -33$$

$$\hline \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 31b = -93 \quad / : 31$$

$$b = -3$$

$$15a - 10 \cdot (-3) = 60 \quad / -30$$

$$15a = 30 \quad / : 15$$

$$a = 2$$

$$K = \{[2; -3]\}$$

Sčítací metoda je ve většině případů nejúspornější a nejrychlejší metodou na řešení soustav rovnic. Využíváme totiž zápis členů pod sebe k tomu, abychom ušetřili postupný zápis úprav takto:

$$3a - 2b = 12$$

$$5a + 7b = -11$$

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 31b = -93 \quad / : 31$$

$$b = -3$$

$$15a - 10 \cdot (-3) = 60 \quad / -30$$

$$15a = 30 \quad / : 15$$

$$a = 2$$

$$K = \{[2; -3]\}$$

Pedagogická poznámka: V zadání následujícího příkladu je uvedeno, že se žáci mají pokoušet o nejúspornější formu zápisu. Doporučuji to, ale netrvám na tom. Pokud se někdo bojí, nechávám ho zapisovat mezivýsledky.

Př. 6: Vypočti soustavy rovnic sčítací metodou. Používej nejúspornější formu zápisu.

$$a) \quad \begin{array}{l} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{array}$$

$$b) \quad \begin{array}{l} 2a - 4b = -10 \\ 5a + 5b = 5 \end{array}$$

$$c) \quad \begin{array}{l} 3a + 7b = 13 \\ 4a + 2b = 10 \end{array}$$

$$a) \quad \begin{array}{l} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{array}$$

$$\hline 3[1] - 2[2] \quad 5y = -5$$

$$y = -1$$

$$2x + 3 \cdot (-1) = 1$$

$$2x = 4 \quad / : 2$$

$$x = 2$$

$$K = \{[2; -1]\}$$

$$\begin{array}{l}
\text{b)} \\
2a - 4b = -10 \quad |:2 \\
5a + 5b = 5 \quad |:5 \\
\hline
a - 2b = -5 \\
a + b = 1 \\
\hline
[[2]] - [[1]] \quad 3b = 6 \quad |:3 \\
b = 2 \\
a - 2 \cdot 2 = -5 \quad |+4 \\
a = -1
\end{array}
\quad K = \{[-1; 2]\}$$

$$\begin{array}{l}
\text{c)} \\
3a + 7b = 13 \\
4a + 2b = 10 \\
\hline
7[[2]] - 2[[1]] \quad 22a = 44 \quad |:22 \\
a = 2 \\
3 \cdot 2 + 7b = 13 \quad |-6 \\
7b = 7 \quad |:7 \\
b = 1
\end{array}
\quad K = \{[2; 1]\}$$

Shrnutí: