

4.2.23 Řešení soustav rovnic - shrnutí

Předpoklady: 040222

Pedagogická poznámka: V úvodu si po chvilce společně projdeme, kterou soustavu kterým postupem a pak už žáci počítají samostatně. Úspěšné vyřešení prvních dvou příkladů hodnotím plusem, za každý bod z příkladu 3 je další plus, celá hodina pak za jedničku.

Př. 1: Jakými způsoby řešíme soustavy rovnic? Demonstruj každý ze tří postupů na jedné z následujících soustav (pokus se najít pro každou metodu soustavu, u které je použití metody nejvýhodnější).

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \begin{array}{l} 2x - y = 8 \\ 5x + y = 13 \end{array} & \text{b)} & \begin{array}{l} 3x - y = -5 \\ 5x + 7y = 9 \end{array} & \text{c)} & \begin{array}{l} 4x - 3y = 17 \\ 4x + y = 5 \end{array} \end{array}$$

Výběr metody:

- Bod a) vyřešíme sčítací metodou (ihned můžeme sečíst rovnice a získat rovnici bez neznámé x).
- Bod c) vyřešíme srovnávací metodou (z obou rovnic můžeme ihned vyjádřit výraz $4x$).
- Bod b) vyřešíme dosazovací metodou (nehodí se na něj žádná z ostatních metod, z první rovnice můžeme bez zlomku vyjádřit y a dosadit do druhé rovnice).

a) Sčítací metoda: sečteme (odečteme) rovnice tak, aby ve vzniklé rovnici jedna z neznámých zmizela (v našem případě rovnice sčítáme, aby se odečetla neznámá y).

$$2x - y = 8$$

$$5x + y = 13$$

$$\hline 2x - y = 8$$

$$\underline{[1] + [2]} \quad 7x = 21$$

$$x = 3$$

$$5x + y = 13 \quad / -5x$$

$$y = 13 - 5x = 13 - 5 \cdot 3 = -2$$

$$K = \{[3; -2]\}$$

$$\text{b)} \quad 3x - y = -5$$

$$5x + 7y = 9$$

$$3x - y = -5 \quad / +y + 5$$

$$3x + 5 = y$$

$$5x + 7(3x + 5) = 9$$

$$5x + 21x + 35 = 9 \quad / -35$$

$$26x = -26 \quad / : 26$$

$$x = -1$$

$$y = 5 + 3x = 5 + 3(-1) = 2$$

$$K = \{[-1; 2]\}$$

$$c) \quad 4x - 3y = 17$$

$$4x + y = 5$$

$$4x - 3y = 17 \quad / +3y$$

$$4x + y = 5 \quad / -y$$

$$4x = 17 + 3y$$

$$4x = 5 - y$$

$$17 + 3y = 5 - y \quad / +y - 17$$

$$4y = -12 \quad / :4$$

$$y = -3$$

$$4x = 5 - y = 5 - (-3) = 8$$

$$x = 2$$

$$K = \{[2; -3]\}$$

Př. 2: Vyřeš soustavu rovnic libovolnou metodou.

$$a) \quad 2x + 3y = -9$$

$$b) \quad 3a + 4b = 13$$

$$c) \quad 2x - 5y = 3$$

$$x + y = -2$$

$$5a - 5b = 10$$

$$3x + 3y = 5$$

$$a) \quad 2x + 3y = -9$$

$$x + y = -2$$

Vyjádříme z první rovnice x a dosadíme do druhé.

$$x + y = -2 \quad / -y$$

$$x = -2 - y$$

$$2(-2 - y) + 3y = -9$$

$$-4 - 2y + 3y = -9 \quad / -4$$

$$y = -5$$

$$x = -2 - y = -2 - (-5) = 3$$

$$K = \{[3; -5]\}$$

$$b) \quad 3a + 4b = 13$$

$$5a - 5b = 10$$

Druhou rovnici můžeme vydělit 5 a tím zjednoduší. Pak vyjádříme a a dosadíme do první rovnice.

$$a - b = 2 \quad / +b$$

$$a = 2 + b$$

Dosadíme do první rovnice.

$$3(2 + b) + 4b = 13$$

$$6 + 3b + 4b = 13 \quad / -6$$

$$7b = 7 \quad / :7$$

$$b = 1$$

$$a = 2 + b = 2 + 1 = 3$$

$$K = \{[3; 1]\}$$

$$c) \quad 2x - 5y = 3$$

$$3x + 3y = 5$$

Z první rovnice vyjádříme x a dosadíme do druhé rovnice.

$$2x - 5y = 3 \quad / +5y$$

$$2x = 3 + 5y \quad / :2$$

$$x = \frac{3+5y}{2}$$

Dosadíme.

$$3 \cdot \frac{3+5y}{2} + 3y = 5 \quad / \cdot 2$$

$$3(3+5y) + 6y = 10$$

$$9 + 15y + 6y = 10 \quad / -9$$

$$21y = 1 \quad / : 21$$

$$y = \frac{1}{21}$$

$$\text{Dopočteme } x: x = \frac{3+5y}{2} = \frac{3+5 \cdot \frac{1}{21}}{2} = \frac{63+5}{21} = \frac{68}{21} = \frac{34}{21} \quad K = \left\{ \left[\frac{34}{21}; \frac{1}{21} \right] \right\}$$

Pedagogická poznámka: V bodě je zajímavé sledovat, kdo si druhou rovnici nejdřív pokrátí. V době, kdy se většina třídy dostane za tento příklad, se o tom zmíním u tabule.

Př. 3: Vyřeš soustavu rovnic.

$$\text{a) } \frac{2}{x-2} = \frac{4}{y+4}$$

$$2(x-y) = 3(2x+y) - 2$$

$$\text{b) } (x+2)^2 - y = (x-1)(x+3)$$

$$x + (y-3)^2 = (y+2)(y-1)$$

V obou případech musíme obě rovnice v soustavě nejdříve zjednodušit a teprve poté použít odpovídající metodu řešení soustavy.

$$\text{a) } \frac{2}{x-2} = \frac{4}{y+4}$$

$$2(x-y) = 3(2x+y) - 2$$

$$\frac{2}{x-2} = \frac{4}{y+4} \quad / (x-2)(y+4)$$

$$2(y+4) = 4(x-2)$$

$$2y+8 = 4x-8 \quad / -2y+8$$

$$4x-2y = 16$$

$$2(x-y) = 3(2x+y) - 2$$

$$2x-2y = 6x+3y-2 \quad / -2x+2y$$

$$4x+5y-2=0 \quad / +2$$

$$4x+5y = 2$$

Využijeme sčítací metodu (v obou rovnicích je výraz $4x$).

$$4x-2y = 16$$

$$4x+5y = 2$$

$$\underline{4x-2y = 16}$$

$$[[2]] - [[1]] \quad 7y = -14 \quad / : 7$$

$$y = -2$$

Dopočteme x : $4x-2y = 16 \quad / +2y$

$$4x = 16 + 2y = 16 + 2(-2) = 12$$

$$x = 3$$

$$K = \{[3; -2]\}$$

$$\begin{aligned} & (x+2)^2 - y = (x-1)(x+3) \\ \text{b)} \quad & x + (y-3)^2 = (y+2)(y-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x+2)^2 - y &= (x-1)(x+3) & x + y^2 - 6y + 9 &= y^2 - y + 2y - 2 & / -y^2 \\ x^2 + 4x + 4 - y &= x^2 - x + 3x - 3 & / -x^2 & x - 6y + 9 &= y - 2 & / -y - 9 \\ 4x + 4 - y &= 2x - 3 & / -2x - 4 & x - 7y &= -11 \end{aligned}$$

$$2x - y = -7$$

Z druhé rovnice vyjádříme x a dosadíme do první.

$$\begin{aligned} x - 7y &= -11 & / +7y \\ x &= 7y - 11 \end{aligned}$$

Dosadíme.

$$\begin{aligned} 2(7y - 11) - y &= -7 \\ 14y - 22 - y &= -7 & / 22 \\ 13y &= 15 & / :13 \end{aligned}$$

$$y = \frac{15}{13}$$

$$\text{Dopočteme } x: x = 7y - 11 = 7 \cdot \frac{15}{13} - 11 = \frac{105 - 143}{13} = -\frac{38}{13} \quad K = \left\{ \left[-\frac{38}{13}; \frac{15}{13} \right] \right\}$$

$$2a + 3b - 2c = 15$$

Př. 4: Vyřeš soustavu tří rovnic o třech neznámých $2a - 2b - c = -1$.

$$a + b + c = 4$$

Vyjádříme ze třetí rovnice (je nejjednodušší): $a + b + c = 4 \quad / -a - b$

$$c = 4 - a - b$$

Dosadíme do první rovnice: $2a + 3b - 2(4 - a - b) = 15$

$$2a + 3b - 8 + 2a + 2b = 15 \quad / +8$$

$$4a + 5b = 23$$

Dosadíme do druhé rovnice: $2a - 2b - (4 - a - b) = -1$

$$2a - 2b - 4 + a + b = -1 \quad / +4$$

$$3a - b = 3$$

Získali jsme soustavu: $\begin{cases} 4a + 5b = 23 \\ 3a - b = 3 \end{cases}$

Z druhé rovnice vyjádříme b a dosadíme do první.

$$3a - b = 3 \quad / +b - 3$$

$$3a - 3 = b$$

Dosadíme.

$$4a + 5(3a - 3) = 23$$

$$4a + 15a - 15 = 23 \quad / +15$$

$$19a = 38 \quad / :19$$

$$a = 2$$

Dopočteme b : $b = 3a - 3 = 3 \cdot 2 - 3 = 3$

Dopočteme c : $c = 4 - a - b = 4 - 2 - 2 = 0$.

$$K = \{[2; 3; 0]\}$$

Shrnutí: Dosazovací metodou můžeme řešit i soustavy většího počtu rovnic a větším počtu neznámých.