

4.2.27 Slovní úlohy vedoucí na soustavy rovnic I

Předpoklady: 040225

Pedagogická poznámka: Naprostou většinu chyb při sestavování rovnic v následujících příkladech tvoří „obrácené rovnosti“, ve kterých studenti zapisují vztahy mezi neznámými obráceně, než mají (například $p + 12 = d$ místo správného $p = d + 12$). Je to únavné, ale zatím jsem neobjevil nic lepšího než chodit od lavice k lavici a opakovat: Která strana je větší? Kam tedy musíš přidávat?).

Př. 1: Najdi dvě čísla. První číslo je o 12 větší než druhé, druhé číslo je třikrát menší než první.

První číslo ... p
Druhé číslo ... d

První číslo je o 12 větší než druhé ... $p - 12 = d$.

Druhé číslo je třikrát menší než první ... $d = \frac{p}{3}$

Soustavu ani nemusíme upravovat, rovnou použijeme srovnávací metodu.

$$p - 12 = \frac{p}{3} \quad | \cdot 3$$

$$3p - 36 = p \quad | +36 - p$$

$$2p = 36 \quad | : 2$$

$$p = 18$$

Dopočteme druhé číslo: $d = \frac{p}{3} = \frac{18}{3} = 6$.

Hledanými čísly jsou 18 (první číslo) a 6 (druhé číslo).

Př. 2: Jsou dána dvě kladná čísla. Dvojnásobek prvního je o 45 větší než pětinašobek druhého. Kdyby bylo první číslo o dvě menší, bylo by třikrát větší než druhé číslo. Najdi tato čísla.

První číslo ... p
Druhé číslo ... d

Dvojnásobek prvního je o 45 větší než pětinašobek druhého ... $2p - 45 = 5d$.

Kdyby bylo první číslo o dvě menší, bylo by třikrát větší než druhé číslo ... $p - 2 = 3d$.

Z druhé rovnice vyjádříme p a dosadíme do první.

$$p - 2 = 3d \quad | +2$$

$$p = 3d + 2$$

Dosadíme do první rovnice.

$$2(3d + 2) - 45 = 5d$$

$$6d + 4 - 45 = 5d \quad | -5d$$

$$d - 41 = 0 \quad | +41$$

$$d = 41$$

Dopočteme první číslo: $p = 3d + 2 = 3 \cdot 41 + 2 = 125$.

Hledanými čísly jsou 125 a 41.

Př. 3: Sečteme-li čtvrtinu prvního a polovinu druhého čísla, získáme 8. Pokud od poloviny prvního odečteme třetinu druhého čísla, získáme 4. O jaká čísla jde?

První číslo ... p

Druhé číslo ... d

Sečteme-li čtvrtinu prvního a polovinu druhého čísla, získáme 8 ... $\frac{p}{4} + \frac{d}{2} = 8$.

Od poloviny prvního odečteme třetinu druhého čísla, získáme 4 ... $\frac{p}{2} - \frac{d}{3} = 4$.

Rovnice upravíme.

$$\frac{p}{4} + \frac{d}{2} = 8 \quad | \cdot 4$$

$$p + 2d = 32$$

$$\frac{p}{2} - \frac{d}{3} = 4 \quad | \cdot 6$$

$$3p - 2d = 24$$

Soustava rovnic, řešíme sčítací metodou:

$$p + 2d = 32$$

$$3p - 2d = 24$$

$$4p = 56 \quad | :4$$

$$p = 14$$

Z první rovnice vypočteme číslo d : $p + 2d = 32 \quad | -p$

$$2d = 32 - p \quad | :2$$

$$d = \frac{32 - p}{2} = \frac{32 - 14}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

Jde o čísla 14 a 9.

Př. 4: Neznámé dvojciferné číslo je pětkrát větší než jeho ciferný součet. Pokud prohodíme jeho cifry, získáme číslo, které je o 9 větší než původní číslo. Urči původní číslo.

Číslo je dvojciferné \Rightarrow hledáme dvě cifry (čísla od 0 do 9)

číslo na místě jednotek ... j

číslo na místě desítek ... d

Celé číslo můžeme zapsat jako dj , ale neznamená to $d \cdot j$, ale $10d + j$.

(pro číslo 32 platí: $j = 2$, $d = 3$, $32 = 3 \cdot 10 + 2$, neplatí $32 = 3 \cdot 2$).

dvojciferné číslo je pětkrát větší než jeho ciferný součin ... $10d + j = 5(d + j)$.

prohodíme-li jeho cifry, získáme číslo, které je o 9 větší než původní číslo ...

$$10j + d = 10d + j + 9$$

Upravíme obě rovnice.

$$10d + j = 5(d + j)$$

$$10j + d = 10d + j + 9$$

$$10d + j = 5d + 5j \quad | -5d - 5j$$

$$9j - 9d = 9 \quad | :9$$

$$5d - 4j = 0$$

$$j - d = 1$$

$$5d - 4j = 0$$

$$j - d = 1$$

Z druhé rovnice vyjádříme a dosadíme do první.

$$j - d = 1 \quad | +d$$

$$j = d + 1$$

Dosadíme.

$$5d - 4(d + 1) = 0$$

$$5d - 4d - 4 = 0 \quad | +4$$

$$d = 4$$

Dopočteme j : $j = d + 1 = 4 + 1 = 5$.

Hledaným číslem je číslo 54.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je tak trochu vyrovnávací (mnozí se k němu ani nedostanou, a ti nejrychlejší se na něm zastaví. Po nějaké době jim poradím zápis dvojciferného čísla $dj = d \cdot 10 + j$.

Př. 5: Za 2 kg jablek a 3 kg pomerančů zaplatila Majda 126,5 Kč. Petr za 4 kg jablek a 5 kg pomerančů zaplatil 226,1 Kč. Kolik stojí 1kg jablek? Kolik 1 kg pomerančů?

$$1 \text{ kg jablek} \quad \dots \quad j$$

$$1 \text{ kg pomerančů} \quad \dots \quad p$$

$$\text{Za 2 kg jablek a 3 kg pomerančů zaplatila Majda 126,5 Kč} \quad \dots \quad 2j + 3p = 126,5$$

$$\text{Za 4 kg jablek a 5 kg pomerančů zaplatil 226,1 Kč} \quad \dots \quad 4j + 5p = 226,1$$

Z první rovnice vyjádříme $2j$ a dosadíme do druhé.

$$2j + 3p = 126,5 \quad | -3p$$

$$2j = 126,5 - 3p$$

Dosadíme.

$$2(126,5 - 3p) + 5p = 226,1$$

$$253 - 6p + 5p = 226,1$$

$$253 - p = 226,1 \quad | +p - 226,1$$

$$26,9 = p$$

Dopočteme j : $2j = 126,5 - 3p = 126,5 - 3 \cdot 26,9 = 45,8 \quad | :2$

$$j = 22,9$$

1 kg jablek stojí 22,9 Kč, 1 kg pomerančů 26,9 Kč.

Př. 6: Dušan zamrazil 36 litrů moštu do PET lahví o objemu 2 litry a 1,5 litru. Kolik kterých lahví potřeboval, jestliže jich použil celkem 20?

lahví 2 l ... d
lahví 1,5 l ... j

Celkem 20 lahví ... $d + j = 20$.
Zavařil 36 litrů moštu ... $2d + 1,5j = 36$

Z první rovnice dosadíme do druhé: $d + j = 20 \quad | -j$.

$$d = 20 - j$$

Dosadíme.

$$2(20 - j) + 1,5j = 36$$

$$40 - 2j + 1,5j = 36$$

$$40 - 0,5j = 36 \quad | -36 + 0,5j$$

$$4 = 0,5j \quad | \cdot 2$$

$$j = 8$$

Dopočteme d : $d = 20 - j = 20 - 8 = 12$.

Dušan potřeboval 12 PET lahví o objemu 2 litry a 8 PET lahví o objemu 1,5 litru.

Př. 7: Jestliže strany obdélníku zvětšíme o 1, zvětší se jeho obsah o 19 cm^2 . Jestliže delší stranu o 2 zvětšíme a kratší o 2 zmenšíme, zmenší se jeho obsah o 12 cm^2 . Urči strany obdélníku.

Delší strana ... d
Kratší strana ... k

Původní obsah $S = dk$

strany obdélníku zvětšíme o 1, zvětší se jeho obsah o 19 cm^2 ...

$$(d + 1)(k + 1) = dk + 19$$

delší stranu o 2 zvětšíme a kratší o 2 zmenšíme, zmenší se jeho obsah o 12 cm^2 ...

$$(d + 2)(k - 2) = dk - 12$$

Upravíme rovnice.

$$(d + 1)(k + 1) = dk + 19$$

$$dk + d + k + 1 = dk + 19 \quad | -dk - 1$$

$$d + k = 18$$

$$(d + 2)(k - 2) = dk - 12$$

$$dk - 2d + 2k - 4 = dk - 12 \quad | -dk + 4$$

$$2k - 2d = -8 \quad | : 2$$

$$k - d = -4$$

Soustavu řešíme sčítací metodou.

$$k + d = 18$$

$$k - d = -4$$

$$2k = 14 \quad /:2$$

$$k = 7$$

Dopočteme d : $k + d = 18 \quad /-d$

$$k = 18 - d = 18 - 7 = 11$$

Kratší strana obdélníku má délku 7 cm, delší 11 cm.

Shrnutí: