

4.2.28 Slovní úlohy vedoucí na soustavy rovnic II

Předpoklady: 040227

Př. 1: Jestliže kratší stranu obdélníku zmenšíme o 1 cm, a delší zvětšíme o 2 cm, zvětší se jeho obsah o 6 cm^2 . Jestliže delší stranu o 1 zmenšíme a kratší o 1 zvětšíme, zvětší se jeho obsah o 1 cm^2 . Urči strany obdélníku.

Delší strana ... d

Kratší strana ... k

Původní obsah $S = dk$

kratší stranu obdélníku zmenšíme o 1 cm, a delší zvětšíme o 2 cm, zvětší se jeho obsah o 6 cm^2 ... $(d+2)(k-1) = dk+6$

delší stranu o 1 zmenšíme a kratší o 1 zvětšíme, zvětší se jeho obsah o 1 cm^2 ...
 $(d-1)(k+1) = dk+1$

Upravíme rovnice.

$$(d+2)(k-1) = dk+6$$

$$dk-d+2k-2 = dk+6 \quad | -dk+2$$

$$2k-d=8$$

$$(d-1)(k+1) = dk+1$$

$$dk+d-k-1 = dk+1 \quad | -dk+1$$

$$d-k=2$$

Z pravé rovnice vypočteme d a dosadíme do první rovnice.

$$d-k=2 \quad | +k$$

$$d=2+k$$

Dosadíme.

$$2k-(2+k)=8$$

$$k-2=8 \quad | +2$$

$$k=10$$

Dopočteme d : $d=2+k=2+8=10$.

Kratší strana obdélníku má délku 10 cm, delší 12 cm.

Pedagogická poznámka: Nejčastějším problémem při sestavování rovnice je vyjádření původního obsahu vzorce $S = kd$. Někdo píše pořád S a má tak třetí neznámou, objevuje se i použití standardního vzorce z tabulek $S = ab$, čímž se počet neznámých zdvojnásobí (samozřejmě pouze v případě, že dotyčný písmena a, b nepoužil k označení ostatních stran).

Př. 2: Alena je o 22 let starší než její dcera Eva. Před sedmi lety byla Alena třikrát starší než Eva. Kolik je jim let?

Alena ... a let

Eva ... e let

Alena je o 22 let starší než její dcera Eva ... $a = e + 22$
Před sedmi lety byla Alena třikrát starší než Eva ... $(a - 7) = 3(e - 7)$

Upravíme druhou rovnici: $a - 7 = 3e - 21 \quad / +7$

$$a = 3e - 14$$

Rovnice srovnáme: $e + 22 = 3e - 14 \quad / -e + 14$

$$36 = 2e \quad / : 2$$

$$18 = e$$

Dopočteme a : $a = e + 22 = 18 + 22 = 40$

Aleně je 40 let, Evě 18.

Př. 3: 32 studentů kvarty se při hře rozdělilo do dvou tříd. Po prvním kole přešli čtyři studenti z první třídy do druhé, takže při druhém kole byla v druhé třídě polovina počtu studentů, kteří byli v první třídě během prvního kola. Jak byli studenti rozděleni do tříd při prvním kole?

První kolo v první třídě ... p

První kolo v druhé třídě ... d

32 studentů se rozdělilo do dvou tříd ... $p + d = 32$

Při druhém kole v druhé třídě ... $d + 4$

při druhém kole byla v druhé třídě polovina počtu studentů, kteří byli v první třídě během prvního kola ... $(d + 4) \cdot 2 = p$

Dosadíme za p do první rovnice: $(d + 4) \cdot 2 + d = 32$

$$2d + 8 + d = 32 \quad / -8$$

$$3d = 24 \quad / : 3$$

$$d = 8$$

$$p = 32 - d = 32 - 8 = 24$$

Při prvním kole bylo v první třídě 24 studentů a v druhé 8 studentů.

Př. 4: Věra má dvakrát více bratrů než sester. Každý z jejích bratrů má tolik sester, kolik má bratrů. Kolik má Věra sourozenců?

Počet sester ... s

Počet bratrů ... b

Věra má dvakrát více bratrů než sester: ... $b = 2(s - 1)$ Věra je jedna ze sester \Rightarrow má o jednu sestru méně.

Každý z jejích bratrů má tolik sester, kolik má bratrů ... $b - 1 = s$ každý z bratrů je jeden z bratrů a tudíž má o jednoho bratra méně, než je počet všech bratrů.

Z druhé rovnice si vyjádříme b : $b - 1 = s$

$$b = s + 1$$

Rovnice srovnáme: $2(s - 1) = s + 1$

$$2s - 2 = s + 1 \quad / -s + 2$$

$$s = 3$$

$$b = s + 1 = 3 + 1 = 4$$

Věra pochází ze sedmi sourozenců \Rightarrow má šest sourozenců.

Př. 5: Kolik litrů 36 % roztoku a kolik litrů 20 % roztoku musíme smíchat, abychom získali 4 litry 26 % roztoku?

počet litrů 36 % roztoku ... t

počet litrů 20 % roztoku ... d

Abychom získali 4 litry roztoku ... $t + d = 4$

Abychom získali 4 litry 26 % roztoku ... $36 \cdot t + 20 \cdot d = 4 \cdot 26$

Vyjádříme z první rovnice a dosadíme do druhé.

$$t + d = 4 \quad / -d$$

$$t = 4 - d$$

Dosadíme.

$$36(4 - d) + 20d = 104$$

$$144 - 36d + 20d = 104$$

$$144 - 16d = 104 \quad / +16d - 104$$

$$40 = 16d \quad / :16$$

$$d = 2,5$$

Dopočteme t : $t = 4 - d = 4 - 2,5 = 1,5$

Na výrobu 4 litrů 26 % roztoku musíme smíchat 1,5 litru roztoku o koncentraci 36 % a 2,5 litru roztoku o koncentraci 20 %.

Př. 6: Při výrobě se využívají dva roztoky. Pokud smícháme 1 litr silnějšího a 3 litry slabšího roztoku, vznikne roztok o koncentraci 30 %. Pokud smícháme 2 litry silnějšího a 4 litry slabšího roztoku, vznikne roztok o koncentraci 32 %. Urči koncentrace původních roztoků.

Koncentrace silnějšího roztoku ... x

Koncentrace slabšího roztoku ... y

1 litr silnějšího a 3 litry slabšího roztoku, vznikne roztok o koncentraci 30 % ...

$$1 \cdot x + 3 \cdot y = (1 + 3) \cdot 30$$

2 litry silnějšího a 4 litry slabšího roztoku, vznikne roztok o koncentraci 32 % ...

$$2x + 4y = (2 + 4) \cdot 32$$

Soustava: $x + 3y = 120$
 $2x + 4y = 192 \Rightarrow$ z první rovnice vyjádříme a dosadíme do druhé.

$$x + 3y = 120 \quad / -3y$$

$$x = 120 - 3y$$

Dosadíme.

$$2(120 - 3y) + 4y = 192$$

$$240 - 6y + 4y = 192 \quad / -192$$

$$48 - 2y = 0 \quad / +2y$$

$$48 = 2y \quad / :24$$

$$y = 24$$

Dopočteme x : $x = 120 - 3y = 120 - 3 \cdot 24 = 48$.

Silnější roztok má koncentraci 48 %, slabší 24 %.

Př. 7: Pájka je slitina olova a cínu ve vhodném poměru. Kdybychom ke vstupní surovině přidali tři díly cínu, získali bychom slitinu obsahující 75 % cínu. Kdybychom ke vstupní surovině přidali dva díly olova a jeden díl cínu, získali bychom slitinu obsahující 50 % olova. Kolik dílů olova a kolik dílů cínu je obsaženo ve výchozí surovině?

počet dílů olova ... $o \Rightarrow$ koncentrace olova: $\frac{o}{o+c}$.

počet dílů cínu ... $c \Rightarrow$ koncentrace cínu: $\frac{c}{o+c}$.

Kdybychom přidali tři díly cínu, získali bychom slitinu obsahující 75 % cínu ...

$$\frac{c+3}{c+3+0} = 0,75.$$

dva díly olova a jeden díl cínu, získali bychom slitinu obsahující 50 % olova ...

$$\frac{o+2}{o+2+c+1} = 0,5$$

Upravíme rovnice.

$$\frac{c+3}{c+3+0} = 0,75 \quad / \cdot o+c+3$$

$$\frac{o+2}{o+2+c+1} = 0,5 \quad / o+c+3$$

$$c+3 = \frac{3}{4}(o+c+3) \quad / \cdot 4$$

$$o+2 = \frac{1}{2}(o+c+3) \quad / \cdot 2$$

$$4c+12 = 3o+3c+9 \quad / -4c-9$$

$$2o+4 = o+c+3 \quad / -o-4$$

$$3 = 3o - c$$

$$o = c - 1$$

Z pravé rovnice dosadíme za o do první rovnice.

$$3 = 3(c-1) - c$$

$$3 = 3c - 3 - c \quad / +3$$

$$6 = 2c \quad / :2$$

$$c = 3$$

Dopočteme o : $o = c - 1 = 3 - 1 = 2$

Pájka se skládá ze tří dílů cínů a dvou dílů olova.

Shrnutí: Rovnice ve slovních úlohách sestavujeme postupně.