4.2.29 Slovní úlohy vedoucí na soustavy rovnic

Předpoklady: 040228

Př. 1: Připomeň si, jakým způsobem jsme řešili slovní úlohy na pohyby a společnou práci.

Společná práce: pomocí doby nutné k vykonání celého úkolu, jsme si vyjádřili vykonávané části úkolu. Všechny tyto části dají dohromady 1.

Úlohy na pohyb: Pomocí jedné z pohybových veličin (s, v, t) si popíšeme rovnicí celý pohyb. Postupným dosazováním pak dosáhneme, aby v rovnici byla pouze jedna neznámá. ROvnici vyřešíme.

Př. 2: Oběma přívody se bazének napustí za 36 minut. Po 30 minutách se jeden z přívodů ucpal a bazének se musel dopouštět pouze druhým přívodem, což trvalo ještě 15 minut. Za jak dlouho by se bazén napustil každým přívodem zvlášť?

První přívod ... p minut ... za 1 min ... $\frac{1}{p}$.

Druhý přívod ... d minut ... za 1 min ... $\frac{1}{d}$.

Oběma přívody se bazének napustí za 36 minut ... $\frac{36}{p}+\frac{36}{d}=1$.

Po 30 minutách společného napouštění se dopouštělo druhým ještě 15 minut ...
$$\frac{30}{p}+\frac{30}{d}+\frac{15}{d}=1.$$

Obě rovnice upravíme.

$$\frac{36}{p}+\frac{36}{d}=1 \quad / \cdot pd$$
$$36d+36p=pd$$

$$\frac{30}{p}+\frac{30}{d}+\frac{15}{d}=1 \quad / \cdot pd$$
$$30d+30p+15p=pd$$
$$30d+45p=pd$$

Obě rovnice obsahují člen pd, který překáží při vyjadřování $\Rightarrow$ rovnice odečteme.

$$30d+45p=pd$$
$$\underline{36d+36p=pd}$$
$$-6d+9p=0 \quad /:3$$
$$-2d+3p=0 \quad /+2d$$
$$3p=2d \quad /:2$$
$$d=\frac{3p}{2}$$

Dosadíme do první rovnice.

$$30\cdot\frac{3p}{2}+45p=p\frac{3p}{2}$$

$$45p + 45p = \frac{3p^2}{2} \quad / \cdot 2$$

$$180p = 3p^2 \quad / -180p$$

$$3p^2 - 180p = 0$$

$$3p(p-60) = 0$$

Dvě řešení:

- $p = 0$ (nedává smysl a nevyhovuje podmínkám),
- $p = 60$, $d = \frac{3p}{2} = \frac{3 \cdot 60}{2} = 90$.

Prvním přívodem se bazének napustí za 60 minut, druhým za 90 minut.

Př. 3: Pan ředitel v nebi seká pravidelně s sv. Pavlem hříšníky. Každý má svou sekačku a každý seká, jak mu zbude čas. Dávka hříšníků je stále stejná. Jednou společně sekali 2,5 hodiny, pak si musel sv. Pavel odskočit a tak pan ředitel zbytek hříšníků dosekal za půl hodiny. Jindy si musel po dvou hodinách odskočit na focení do Nebeského zpravodaje pan ředitel a sv. Pavel pak musel sekat ještě hodinu a 20 minut. Za jak dlouho by posekal hříšníky svojí sekačkou sv. Pavel? Za jak dlouho pan ředitel?

sv. Pavel ... p hodin ... za 1 hodinu ... $\frac{1}{p}$.

p. ředitel ... r hodin... za 1 hodinu ... $\frac{1}{r}$

společně sekali 2,5 hodiny, pak si musel sv. Pavel odskočit a tak pan ředitel zbytek hříšníků dosekal za půl hodiny ... $\frac{2,5}{p} + \frac{3}{r} = 1$

po dvou hodinách odskočit na focení do Nebeského zpravodaje pan ředitel a sv. Pavel pak musel sekat ještě hodinu a 20 minut ... $\frac{2}{r} + \frac{2}{p} + \frac{4}{3p} = 1$

Obě rovnice upravíme.

$$\frac{2,5}{p} + \frac{3}{r} = 1 \quad / \cdot 2pr$$

$$5r + 6p = 2pr$$

$$\frac{2}{r} + \frac{2}{p} + \frac{4}{3p} = 1 \quad / \cdot 3pr$$

$$6p + 6r + 4r = 3pr$$

$$6p + 10r = 3pr$$

Obě rovnice obsahují člen *pd*, který překáží při vyjadřování $\Rightarrow$ rovnice vhodně vynásobíme a odečteme.

$$6p + 5r = 2pr \quad / \cdot 3$$

$$6p + 10r = 3pr \quad / \cdot 2$$

$$18p + 15r = 6pr$$

$$12p + 20r = 6pr$$

$$6p - 5r = 0 \quad / -5r$$

$$6p = 5r \quad / : 5$$

$r = \frac{6p}{5}$

Dosadíme do první rovnice.

$6p + 5 \cdot \frac{6p}{5} = 2p\frac{6p}{5}$

$12p = \frac{12p^2}{5} \qquad / \cdot \frac{5}{12}$

$5p = p^2 \qquad / -5p$

$p^2 - 5p = p(p-5) = 0$

Dvě řešení:

- $p = 0$ (nedává smysl a nevyhovuje podmínkám),
- $p = 5$, $r = \frac{6p}{5} = \frac{6 \cdot 5}{5} = 6$.

Sv. Pavel by hříšníky posekal za 6 hodin, pan ředitel za 6 hodin.

Př. 4: Bazén o objemu $750\ \mathrm{m}^3$ se napouští pomocí dvou přítoků. Při posledním napouštění, však byly oba otevřeny pouze 4 hodiny. Kvůli poruše na čerpadlu musel být větší přívod uzavřen a bazén se dopouštěl pouze menším přítokem dalších 25 hodin. Kolik m^3 vody nateče každým z přítoků za hodinu, jestliže větším přítokem nateče za hodinu o $6\ \mathrm{m}^3$ vody více?

Větší přítok za 1 hodinu ... $v\ \mathrm{m}^3$

Menší přítok za 1 hodinu ... $m\ \mathrm{m}^3$

Větším přítokem nateče za hodinu o $6\ \mathrm{m}^3$ vody více ... $v = m + 6$

Oba přívody 4 hodiny, pak menší 25 hodin pro napuštění ... $4v + 29m = 750$

Z první rovnice dosadíme do druhé: $4(m+6) + 29m = 750$

$4m + 24 + 29m = 750 \qquad / -26$

$33m = 726 \qquad / :33$

$m = 22$

Dopočteme druhou neznámou: $v = m + 6 = 22 + 6 = 28$.

Větším přítokem nateče za hodinu $28\ \mathrm{m}^3$, menším $22\ \mathrm{m}^3$.

Př. 5: Dva šílení trenéři honí své týmy stálou rychlostí okolo 400 m dlouhého atletického oválu. Pokud týmy běží stejným směrem potkají se jednou za 800 sekund, pokud běží proti sobě, potkají se každých 80 s. Urči rychlosti, kterými se oba nebohé týmy musí pohybovat.

rychlejší tým ... r m/s

pomalejší tým ... p m/s

Běží proti sobě, potkají se za 80 s $\Rightarrow$ dráha, kterou urazí za 80 s dohromady odpovídá jednomu okruhu ... $80r + 80p = 400$.

Běží stejným směrem, potkají se za 800 s $\Rightarrow$ rozdíl v drahách za 800 s se rovná jednomu okruhu ... $800r - 800p = 400$

Upravíme obě rovnice.

$80r + 80p = 400 \quad / : 40$

$2r + 2p = 10 \quad / : 2$

$r + p = 5$

$800r - 800p = 400 \quad / : 400$

$2r - 2p = 1$

Z první rovnice vyjádříme a dosadíme do druhé.

$r = 5 - p$

Dosadíme.

$2(5 - p) - 2p = 1$

$10 - 2p - 2p = 1 \quad / -1 + 4p$

$9 = 4p \quad / : 4$

$p = 2{,}25$

Dopočteme *r*: $r = 5 - p = 5 - 2{,}25 = 2{,}75$.

Pomalejší tým musí běhat rychlostí 2,25 m/s, rychlejší 2,75 m/s.

Př. 6: Alois navštěvuje svou lásku na kole. Při cestě za ní, ho žene spalující touha a proto jede rychlostí o 3 km/h větší než obvykle na kole jezdí a cestu tak zvládne o 24 minut rychleji. Při zpáteční cestě ho naopak chmury z tíživého odloučení zpomalují a tak kvůli rychlosti o 3 km/h nižší než obvyklé je cesta o 36 minut delší. Jakou rychlostí se Alois obvykle na kole pohybuje? Jak daleko jezdí za svou láskou.

Při obou cestách porovnáváme Aloisův pohyb s jeho pohybem standardní rychlostí $\Rightarrow$ jako proměnné použijeme:

- *v*: normální rychlost jízdy na kole,
- *t*: čas, za který by Alois dorazil ke své lásce normální rychlostí.

jede rychlostí o 3 km/h větší než obvykle na kole jezdí a cestu tak zvládne o 24 minut rychleji

$s_n = s_r$ (jak při normálním, tak při zrychleném pohybu by urazil stejnou vzdálenost)

$vt = v_r t_r$

$vt = (v+3)\left(t - \frac{24}{60}\right)$ jede rychlostí o 3 km/h větší a vše zvládne o 24 minut rychleji

kvůli rychlosti o 3 km/h nižší než obvyklé je cesta o 36 minut delší

$s_n = s_p$ (jak při normálním, tak při pomaleném pohybu by urazil stejnou vzdálenost)

$vt = v_p t_p$

$vt = (v-3)\left(t + \frac{36}{60}\right)$ jede rychlostí o 3 km/h větší a vše zvládne o 24 minut rychleji

Máme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých $\Rightarrow$ manuální problém.

Obě rovnice nejdříve upravíme.

$vt = (v+3)\left(t-\frac{2}{5}\right)$

$vt = vt - \frac{2}{5}v + 3x - \frac{6}{5} \quad / -vt\ / \cdot 5$

$-2v + 15t - 6 = 0$

$vt = (v-3)\left(t+\frac{3}{5}\right)$

$vt = vt + \frac{3}{5}v - 3t - \frac{9}{6} \quad / -vt\ \ / \cdot 5$

$3v - 15t - 9 = 0$

Soustava je připravena na sčítací metodu:

$$\begin{array}{l} 3v - 15t - 9 = 0 \\ -2v + 15t - 6 = 0 \\ \hline v - 15 = 0 \end{array}$$

$v = 15$ km/h

Dopočteme čas a vzdálenost:

$-2v + 15t - 6 = \quad / +2v + 6$

$15t = 6 + 2v = 6 + 2 \cdot 15 = 36 \quad / : 15$

$t = \frac{36}{15} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5} = 2$ h 24 min

Vzdálenost k lásce: $s = vt = 15 \cdot \frac{12}{5}$ km $= 36$ km

Alois jezdí na kole normálně rychlostí 15 km/h. Cesta k jeho lásce je dlouhá 36 km.

Př. 7: Filip je mistr ČR v pití coly více brčky najednou. Ve víceboji načas dosáhl českého rekordu při pití 3 malými a 5 velkými brčky, když v limitu vypil 254 ml coly. Stejné tempo udržel i v královské disciplíně 4 malé, 4 velké, čímž dosáhl skvělých 240 vypitých ml. Jaké množství coly vypije během limitu jedním malým brčkem? Jaké množství vypije za stejnou dobu velkým brčkem?

Množství coly (v ml), které dokáže vypít v limitu jedním malým brčkem … m
Množství coly (v ml), které dokáže vypít v limitu jedním velkým brčkem … v

3 malými a 5 velkými brčky, když v limitu vypil 254 ml coly: $3m + 5v = 254$
4 malé, 4 velké, čímž dosáhl skvělých 240 vypitých ml: $4m + 4v = 240$

Soustava rovnic:

$$\begin{array}{l} 3m + 5v = 254 \\ 4m + 4v = 240 \quad / : 4 \\ \hline 3m + 5v = 254 \\ \quad m + v = 60 \end{array} \Rightarrow m = 60 - v$$

Dosadíme do první rovnice: $3(60 - v) + 5v = 254$

$180 - 3v + 5v = 254 \quad / -180$

$2v = 74 \quad / : 2$

$v = 37$

Dopočteme m: $m = 60 - 37 = 23$

Filip vypije velkým brčkem v limitu 37 ml coly, malým 23 ml coly.

Př. 8: Druhým typem soutěží v pití brčkem je rychlostní vypití daného množství do dna. V základní disciplíně 4 velká, 3 malá vypil daný objem coly za 12,5 sekundy.

V rychlostním pití 6 velkých, 5 malých mu stačilo jen 8 s. Za jak dlouho by Filip vypil celý objem velkým brčkem? Za jak dlouho malým?

Celý objem velkým brčkem … v sekund $\Rightarrow$ za 1sekundu … $\frac{1}{v}$ objemu

Celý objem malým brčkem … m sekund $\Rightarrow$ za 1sekundu … $\frac{1}{m}$ objemu

4 velká, 3 malá vypil daný objem coly za 12,5 sekundy: $12{,}5\cdot\left(\frac{4}{v}+\frac{3}{m}\right)=1$

6 velkých, 5 malých mu stačilo jen 8 s: $8\cdot\left(\frac{6}{v}+\frac{5}{m}\right)=1$

Upravíme obě rovnice:

$$12{,}5\cdot\left(\frac{4}{v}+\frac{3}{m}\right)=1 \quad /\cdot 2$$
$$25\cdot\left(\frac{4}{v}+\frac{3}{m}\right)=2$$
$$\frac{100}{v}+\frac{75}{m}=2 \quad /\cdot vm$$
$$100m+75v=2vm$$

$$8\cdot\left(\frac{6}{v}+\frac{5}{m}\right)=1$$
$$\frac{48}{v}+\frac{40}{m}=1 \quad /\cdot vm$$
$$48m+40v=vm$$

$$100m+75v=2vm$$
$$48m+40v=vm \quad /\cdot 2$$

$$100m+75v=2vm$$
$$96m+80v=2vm$$

Rovnice odečteme

$$4m-5v=0 \quad /+5v$$
$$4m=5v \quad /:4$$
$$m=\frac{5}{4}v$$

Dosadíme do první rovnice

$$100\cdot\frac{5}{4}v+75v=2v\cdot\frac{5}{4}v$$
$$125v+75v=\frac{5v^2}{2}$$
$$200v=\frac{5v^2}{2} \quad /\cdot 2$$
$$200v=\frac{5v^2}{2} \quad /\cdot 2$$
$$400v=5v^2 \quad /:5$$
$$v^2-80v=0$$
$$v(v-80)=0$$

Dvě řešení:

- $v_1=0 \Rightarrow$ nemá reálný význam (není možné vypít daný nenulový objem za 0 s),

- $v_2 = 80 \Rightarrow m = \frac{5}{4}v = \frac{5}{4} \cdot 80 = 100$

Filip by velkým brčkem vypil daný objem coly za 80 s, malým za 100 s.

Shrnutí: