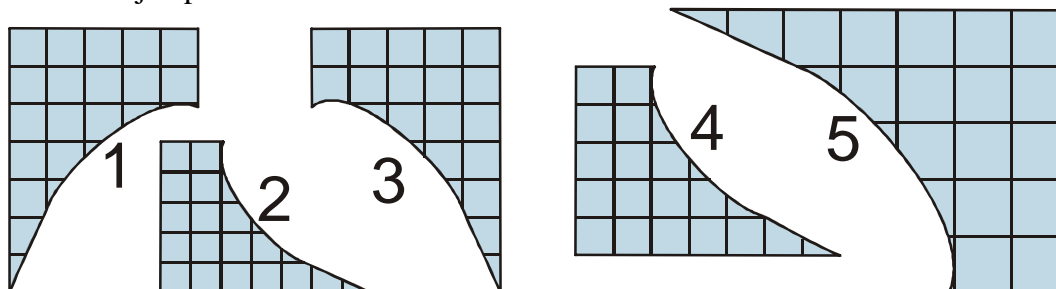


4.3.1 Podobné útvary

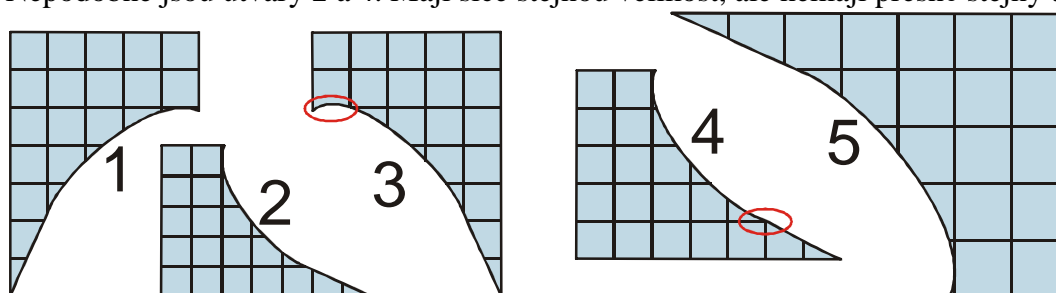
Předpoklady:

Pedagogická poznámka: Na příště si žáci přinesou rýsovací potřeby a kalkulačky.

Př. 1: Které z útvarů jsou podobné s útvarem označeným jako 1? Čtvercová síť ve všech obrázcích je opravdu čtvercová.



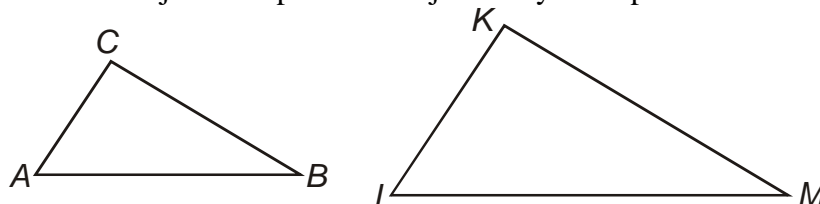
Nepodobné jsou útvary 2 a 4. Mají sice stejnou velikost, ale nemají přesně stejný tvar.



Naopak útvar 2 je zmenšený, útvar 5 zvětšený, ale tvary mají (pokud je možné okem rozlišit) stejné.

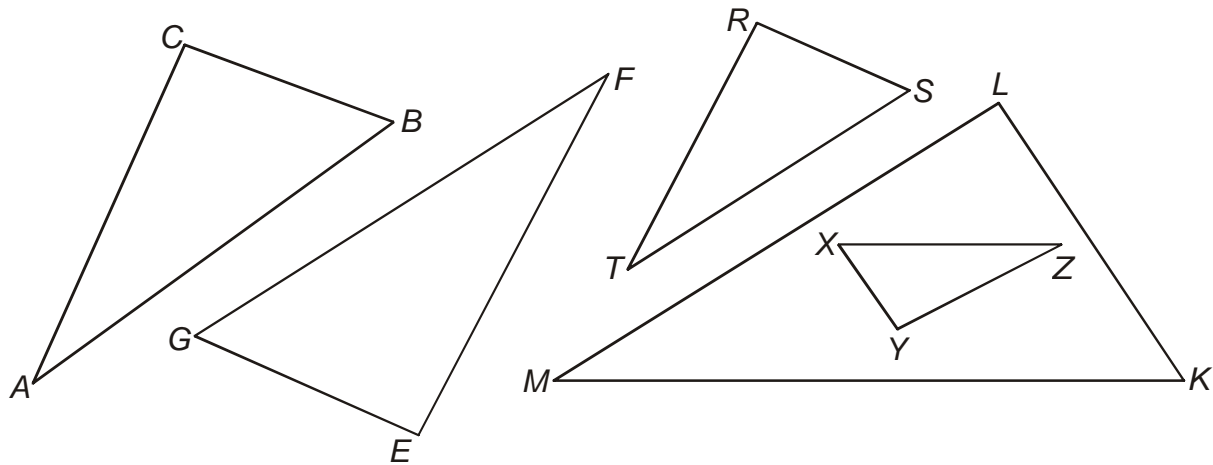
Pokud mají dva útvary stejný tvar. Označujeme je jako podobné útvary. Skutečnost, že útvary U_1 a U_2 jsou si podobné, zapisujeme $U_1 \sim U_2$ a čteme útvar U_2 je podobný útvaru U_1 .

Př. 2: Na obrázku jsou dva podobné trojúhelníky. Je zápis $ABC \sim KLM$ správný?



Správný není, protože bod A je umístěn na jiném místě trojúhelníku než bod K. Správný zápis $ABC \sim LMK$.

Př. 3: Rozhodni, které z trojúhelníků na papírku jsou podobné trojúhelníku ABC . Ověřené podobnosti zapiš pomocí znaku pro podobnost. Najdi jednoznačné matematicky ověřitelné kritérium pro rozhodnutí o podobnosti dvou trojúhelníků. Podle jakého kritéria bychom mohli rozhodovat o podobnosti čtyřúhelníků?



Trojúhelníky jsou si podobné, když jeden vznikne zvětšením (zmenšením) druhého \Rightarrow pokud je jedna strana například dvakrát větší, musí být dvakrát větší i ostatní strany.

\Rightarrow změříme strany trojúhelníků a budeme počítat, zda jsou všechny ve stejném poměru.

Trojúhelník ABC : $|AB| = 6 \text{ cm}$, $|AC| = 5 \text{ cm}$, $|BC| = 3 \text{ cm}$.

Trojúhelník EFG :

- $|GF| = 6,6 \text{ cm}$, $\frac{|GF|}{|AB|} = \frac{6,6}{6} = 1,1$;
- $|EF| = 5,5 \text{ cm}$, $\frac{|EF|}{|AC|} = \frac{5,5}{5} = 1,1$;
- $|GE| = 3,3 \text{ cm}$, $\frac{|EF|}{|AC|} = \frac{3,3}{3} = 1,1$;

$\Rightarrow ABC \sim FGE$ (je 1,1 krát větší).

Trojúhelník RST :

- $|TS| = 5 \text{ cm}$, $\frac{|TS|}{|AB|} = \frac{4,5}{6} = 0,75$;
- $|RT| = 3,8 \text{ cm}$, $\frac{|RT|}{|AC|} = \frac{3,8}{5} = 0,76$;
- $|RS| = 2,3 \text{ cm}$, $\frac{|EF|}{|AC|} = \frac{2,3}{3} = 0,77$;

\Rightarrow pokud zohledníme nepřesnosti měření (strany RT a RS jsou o méně než 1 mm kratší než naměřené délky), zřejmě platí: $ABC \sim TSR$ (je 0,75 krát menší).

Trojúhelník KLM :

- $|MK| = 8,5 \text{ cm}$, $\frac{|KM|}{|AB|} = \frac{8,5}{6} = 1,42$;

- $|LM| = 7,1 \text{ cm}, \frac{|LM|}{|AC|} = \frac{7,1}{5} = 1,42;$

- $|KL| = 4,5 \text{ cm}, \frac{|KL|}{|AC|} = \frac{4,5}{3} = 1,5;$

\Rightarrow rozdíly v poměrech jsou podstatně větší než u trojúhelníku $RST \Rightarrow$ zřejmě nejsou způsoby pouze nepřesnostmi měření \Rightarrow trojúhelník KLM není podobný trojúhelníku ABC .

Trojúhelník XYZ :

- $|XZ| = 3 \text{ cm}, \frac{|XZ|}{|AB|} = \frac{3}{6} = 0,5;$

- $|YZ| = 2,5 \text{ cm}, \frac{|YZ|}{|AC|} = \frac{2,5}{5} = 0,5;$

- $|XY| = 1,4 \text{ cm}, \frac{|XY|}{|AC|} = \frac{1,4}{3} = 0,47;$

\Rightarrow rozdíly v poměrech jsou podstatně větší než u trojúhelníku $RST \Rightarrow$ zřejmě nejsou způsoby pouze nepřesnostmi měření \Rightarrow trojúhelník XYZ není podobný trojúhelníku ABC .

Shrnutí: platí:

- $ABC \sim FGE$ s koeficientem 1,1
- $ABC \sim TSR$ s koeficientem 0,75

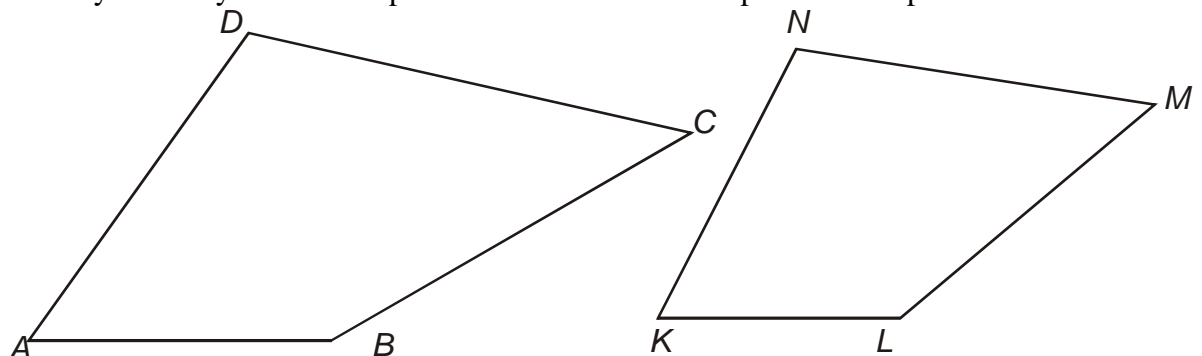
Zbývající dva trojúhelníky nejsou podobné trojúhelníku ABC .

Dva trojúhelníky jsou si podobné, právě když jsou všechny strany zvětšené ve stejném poměru.

U čtyřúhelníků zřejmě platí to samé.

Pedagogická poznámka: Pojmenování stran žáci při výpočtu většinou vůbec neřeší, berou v úvahu pouze velikosti stran a vrcholy se zabývají až při zápisu podobnosti (který je však nutné jim připomínat).

Př. 4: Jsou čtyřúhelníky na obrázku podobné? Ověř kritériem z předchozího příkladu.



Na první pohled se zdá, že čtyřúhelníky nejsou podobné (zdá se, že nemají stejný tvar).
Ověření pomocí délek stran:

- čtyřúhelník $ABCD$: $|AB| = 4 \text{ cm}; |BC| = 5,5 \text{ cm}; |CD| = 6 \text{ cm}; |AD| = 5 \text{ cm},$

- čtyřúhelník $KLMN$: $|KL| = 3,2 \text{ cm}$; $|LM| = 4,4 \text{ cm}$; $|MN| = 4,8 \text{ cm}$; $|KN| = 4 \text{ cm}$,

Poměry stran:

- $\frac{|KL|}{|AB|} = \frac{3,2}{4} = 0,8$,
- $\frac{|LM|}{|BC|} = \frac{4,4}{5,5} = 0,8$,
- $\frac{|MN|}{|CD|} = \frac{4,8}{6} = 0,8$,
- $\frac{|KN|}{|AD|} = \frac{4}{5} = 0,8$.

\Rightarrow poměry odpovídajících stran si odpovídají \Rightarrow čtyřúhelníky by si měly být podle předchozího příkladu podobné (což je divné).

Ověříme, zda se shodují úhly:

- čtyřúhelník $ABCD$: $\alpha = 55^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 42^\circ$, $\delta = 113^\circ$,
- čtyřúhelník $KLMN$: $\alpha = 63^\circ$, $\beta = 140^\circ$, $\gamma = 49^\circ$, $\delta = 108^\circ$.

\Rightarrow čtyřúhelníky si podobné určitě nejsou (nemají stejný tvar, protože nemají stejné úhly).

Ověříme ještě délky úhlopříček:

- $\frac{|KM|}{|AC|} = \frac{7,2}{9,2} = 0,78$,
- $\frac{|LN|}{|BD|} = \frac{3,8}{4,2} = 0,9$,

\Rightarrow čtyřúhelníky $ABCD$ a $KLMN$ si nejsou podobné (nezachovává se poměr velikostí úhlopříček).

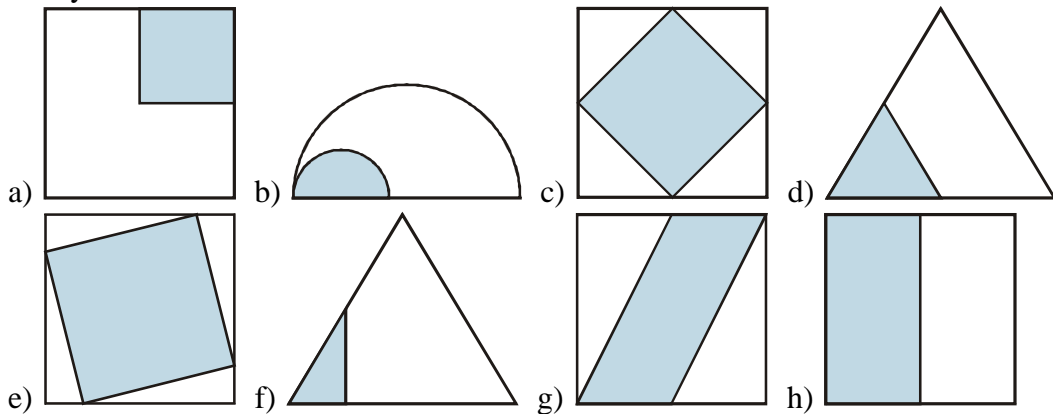
\Rightarrow Není pravda, že dva čtyřúhelníky jsou si podobné, když mají stejné poměry odpovídajících si stran. Souvisí to s tím, že čtyřúhelník není jednoznačně zadán pomocí čtyř stran (potřebujeme pět údajů).

Pedagogická poznámka: Do ověřování pomocí velikosti stran se žáci příliš nehrnou - na první pohled vidí, že čtyřúhelníky podobné nejsou (argumentují tím, že na oči se nedá spoléhat). Teprve, když zjistí, že z poměru stran podobnost vychází, začne je příklad zajímat. Na souvislost s jednoznačností konstrukce si nevzpomenou všichni, ale při diskusi se určitě objeví.

Pokud chceme mít o podobnosti jistotu, musí poměr zachovávat nejen strany útvaru ale i libovolné dvě úsečky, které si odpovídají (tedy i úhlopříčky a všechny další).

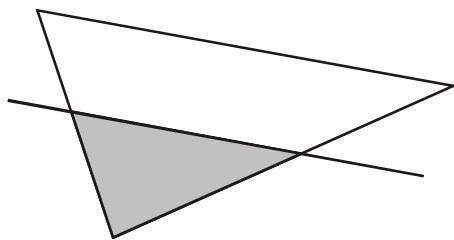
Útvar U_2 je podobný útvaru U_1 , pokud lze všechny jejich body sdružit do dvojic (dvojice odpovídajících si bodů) tak, že pro některé kladné číslo k platí rovnosti $|X_2Y_2| = k \cdot |X_1Y_1|$, kde X_1, Y_1 jsou libovolné body útvaru U_1 a X_2, Y_2 odpovídající body útvaru U_2 . Číslo k se nazývá koeficient podobnosti tvaru U_2 vzhledem k útvaru U_1 .

Př. 5: Rozhodni, u kterých obrázců je vybarvená část podobná celému obrázci. Úsečky, které se zdají být rovnoběžné jsou rovnoběžné, body, které se zdají být středy jsou středy.



Vybarvené části jsou podobné celému obrázci v bodech a), b), c), d), e).

Př. 6: Které přímky rozdělí trojúhelník na dvě části, z nichž jedna je podobná s původním trojúhelníkem?

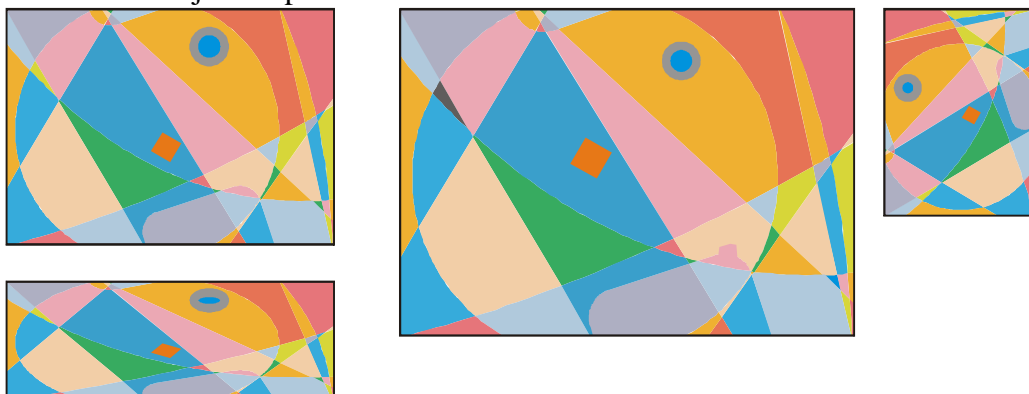


Požadovaným způsobem trojúhelník dělí každá přímka rovnoběžná s některou z jeho stran.

Př. 7: Jaký je vztah mezi podobností a shodností?

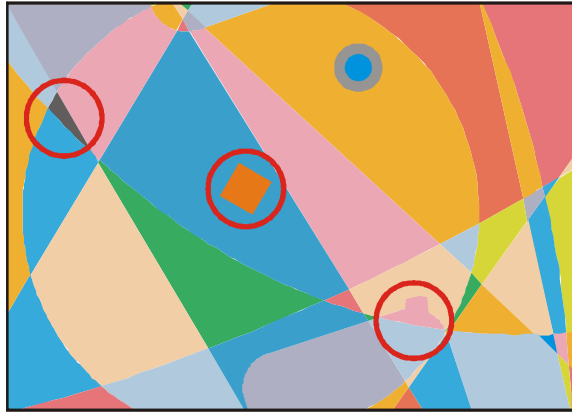
Shodnost je speciálním případem podobnosti s koeficientem 1.

Př. 8: Které z útvarů jsou si podobné?



Podobné jsou si krajní obrázky.

Spodní obrázek má jiný poměr stran (je "splácnutý ve svislém směru), u prostředního se nachází několik drobných odlišností.



Shrnutí: Útvary stejného tvaru nezávisle na jejich velikosti a poloze označujeme jako podobné.