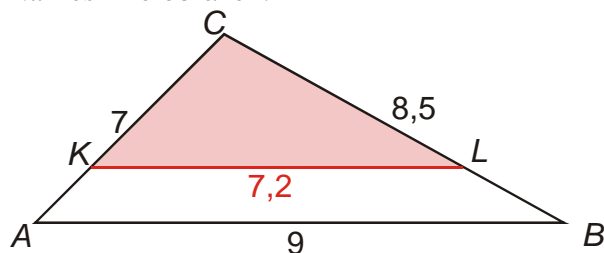


4.3.4 Podobnost trojúhelníků II

Předpoklady: 040303

Př. 1: V trojúhelníku ABC , kde platí $a = 8,5$ cm, $b = 7$ cm a $c = 9$ cm je narýsována příčka KL rovnoběžná se stranou AB o délce 7,2 cm. Bod K leží na straně AC , bod L na straně BC . Urči délky úseků CK a CL .

Nakreslíme obrázek.



Příčka KL vytvoří trojúhelník KLC , který je s trojúhelníkem ABC podobný podle věty uu .

Určíme koeficient podobnosti: $k = \frac{|KL|}{|AB|} = \frac{7,2}{9} = 0,8$.

Dopočteme strany trojúhelníku KLC :

- $|KC| = k|AC| = 0,8 \cdot 7 \text{ cm} = 5,6 \text{ cm}$,
- $|LC| = k|BC| = 0,8 \cdot 8,5 \text{ cm} = 6,8 \text{ cm}$.

Př. 2: Trojúhelník ABC je podobný trojúhelníku EFG ($ABC \sim EFG$). Které z následujících vztahů platí?

a) $\frac{|AB|}{|EF|} = \frac{|BC|}{|FG|}$

b) $\frac{|EG|}{|AC|} = \frac{|EF|}{|FG|}$

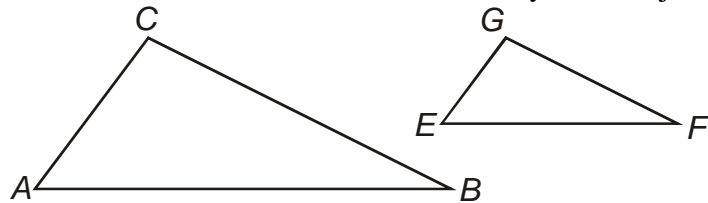
c) $\frac{|BC|}{|FG|} = \frac{|EG|}{|AC|}$

d) $\frac{|FG|}{|CB|} = \frac{|EF|}{|AC|}$

e) $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|EF|}{|EG|}$

f) $\frac{|FG|}{|EG|} = \frac{|BC|}{|AC|}$

Pro snazší orientaci si nakreslíme obrázky obou trojúhelníků.

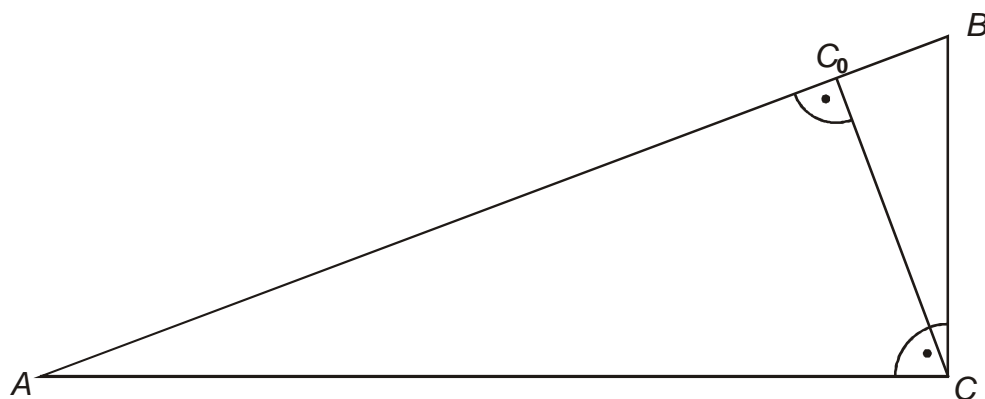


a) $\frac{|AB|}{|EF|} = \frac{|BC|}{|FG|}$ - platí (poměry odpovídajících si stran podobných trojúhelníků)

b) $\frac{|EG|}{|AC|} = \frac{|EF|}{|FG|}$ - neplatí, na levé straně poměr odpovídajících si stran podobných trojúhelníků, na pravé poměr stran v jednom trojúhelníku.

- c) $\frac{|BC|}{|FG|} = \frac{|EG|}{|AC|}$ - neplatí, na obou stranách poměry odpovídajících si stran podobných trojúhelníků, ale v opačném poměru (pokud bychom jeden ze zlomků převrátili, vztah by platil).
- d) $\frac{|FG|}{|CB|} = \frac{|EF|}{|AC|}$ - neplatí, strany v poměru na pravé straně si neodpovídají (správně by bylo buď $\frac{|EF|}{|AB|}$ nebo $\frac{|EG|}{|AC|}$).
- e) $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|EF|}{|EG|}$ - platí, poměr $\frac{\text{nejdelší strana}}{\text{nejkratší strana}}$ u dvou podobných trojúhelníků (trojúhelníků stejného tvaru).
- f) $\frac{|FG|}{|EG|} = \frac{|BC|}{|AC|}$ - platí, poměr $\frac{\text{prostřední strana}}{\text{nejkratší strana}}$ u dvou podobných trojúhelníků (trojúhelníků stejného tvaru).

Př. 3: Narýsuj libovolný pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem γ . Sestroj výšku v_C její patu označ C_0 . Co je na trojúhelnících, které vznikly rozdělením trojúhelníku ABC zajímavého? Vlastnost zapiš, dokaž a poté ověř měřením délek stran.



Výška rozdělila trojúhelník ABC na dva trojúhelníky, které jsou s ním podobné:

$$ABC \sim ACC_0 \sim CBC_0.$$

Důkaz:

$ABC \sim ACC_0$: shodují se dvou úhlech:

- pravý úhel,
- úhel α , který je společný.

$ABC \sim CBC_0$: shodují se ve dvou úhlech:

- pravý úhel,
- úhel β , který je společný.

Měření délek stran:

- trojúhelník ABC : $|AB| = 12,8 \text{ cm}$; $|BC| = 4,5 \text{ cm}$; $|AC| = 12 \text{ cm}$;
- trojúhelník ACC_0 : $|AC| = 12 \text{ cm}$; $|CC_0| = 4,2 \text{ cm}$; $|AC_0| = 11,2 \text{ cm}$;
- trojúhelník CBC_0 : $|BC| = 4,5 \text{ cm}$; $|BC_0| = 1,6 \text{ cm}$; $|CC_0| = 4,2 \text{ cm}$;

Kontrola poměrů stran

$ABC \sim ACC_0$:

- $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{12}{12,8} = 0,938$,
- $\frac{|CC_0|}{|BC|} = \frac{4,2}{4,5} = 0,933$,
- $\frac{|AC_0|}{|AC|} = \frac{11,2}{12} = 0,933$

\Rightarrow trojúhelníky jsou si podobné (malé rozdíly jsou zřejmě způsobeny nepřesností měření).

$ABC \sim CBC_0$:

- $\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{4,5}{12,8} = 0,352$,
- $\frac{|BC_0|}{|BC|} = \frac{1,6}{4,5} = 0,356$,
- $\frac{|CC_0|}{|AC|} = \frac{4,2}{12} = 0,35$

\Rightarrow trojúhelníky jsou si podobné (malé rozdíly jsou zřejmě způsobeny nepřesností měření).

Př. 4: Oprav (doplň) následující věty tak, aby byly správné:

- Shodují-li se dva pravoúhlé trojúhelníky v jednom úhlu, jsou podobné.
- Shodují-li se dva rovnoramenné trojúhelníky v jednom úhlu, jsou podobné.

a) Shodují-li se dva pravoúhlé trojúhelníky v jednom úhlu, jsou podobné.

Dva pravoúhlé trojúhelníky se vždy shodují v jednom (pravém úhlu) \Rightarrow musí se shodovat ještě v jednom nepravém úhlu, aby byly podobné.

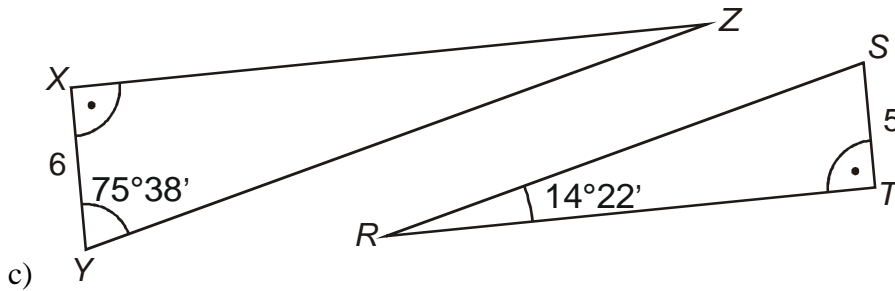
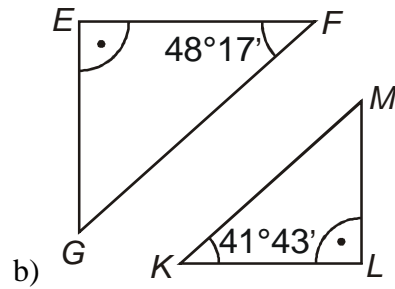
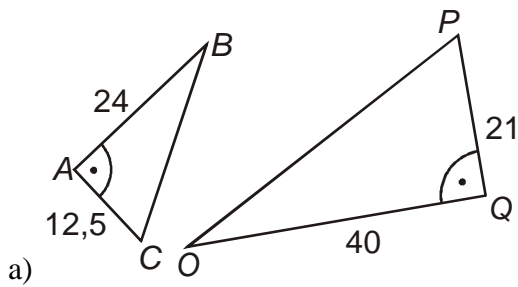
Shodují-li se dva pravoúhlé trojúhelníky v jednom nepravém úhlu, jsou podobné.

b) Shodují-li se dva rovnoramenné trojúhelníky v jednom úhlu, jsou podobné.

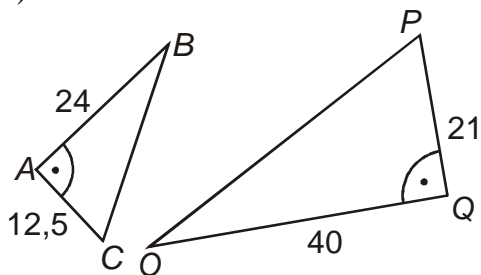
Rovnoramenný trojúhelník má dvě velikosti úhlu: úhel při základně a úhel při vrcholu, pokud mají být trojúhelníky podobné, musí se shodovat ve stejném typu úhlu.

Shodují-li se dva rovnoramenné trojúhelníky v úhlu proti základně nebo v úhlu při základně, jsou podobné.

Př. 5: U každé dvojice trojúhelníku rozhodni pomocí odpovídající věty o jejich podobnosti. Platí podobnosti zapiš pomocí znaku \sim .



a)

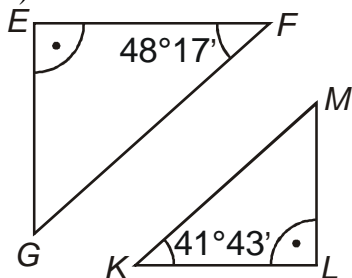


Kontrolujeme platnost věty sus:

- $\frac{21}{12,5} = \frac{210}{125} = \frac{42}{25}$,
- $\frac{40}{24} = \frac{5}{3}$,
- shodný pravý úhel,

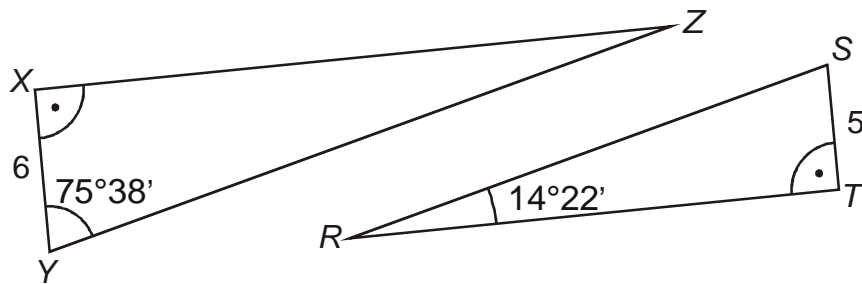
⇒ trojúhelníky nejsou podobné (neshodují se v poměrech stran).

b)



Dopočteme zbývající úhel v trojúhelníku EFG : $90^\circ - 48^\circ 17' = 41^\circ 43' \Rightarrow$ trojúhelníky jsou si podobné (shodují se ve dvou úhlech): $EFG \sim LMK$.

c)



Dopočteme zbývající úhel v trojúhelníku XYZ: $90^\circ - 75^\circ 38' = 14^\circ 22' \Rightarrow$ trojúhelníky jsou si podobné (shodují se ve dvou úhlech): $XYZ \sim TSR$.

Př. 6: Rozhodni o pravdivosti následujících vět.

- Každé dva rovnostranné trojúhelníky jsou podobné.
- Každé dva pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky jsou podobné.
- Každé dva rovnoramenné trojúhelníky jsou podobné.
- Každé dva pravoúhlé trojúhelníky jsou podobné.

a) Každé dva rovnostranné trojúhelníky jsou podobné.

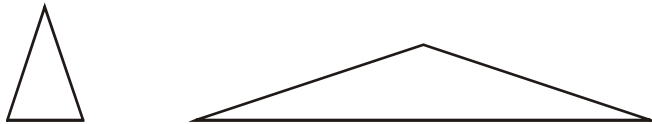
Pravda. Všechny rovnostranné trojúhelníky mají vnitřní úhly 60° .

b) Každé dva pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky jsou podobné.

Pravda. Každý pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník má jeden úhel 90° a zbývající dva úhly $45^\circ \Rightarrow$ všechny rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky jsou podobné.

c) Každé dva rovnoramenné trojúhelníky jsou podobné.

Není pravda. Úhly proti základně (i při základně) mohou být libovolné a nemusí se shodovat.



d) Každé dva pravoúhlé trojúhelníky jsou podobné.

Není pravda. Zbývající dva úhly mohou být libovolné a nemusí se u dvou trojúhelníků shodovat.



Shrnutí: