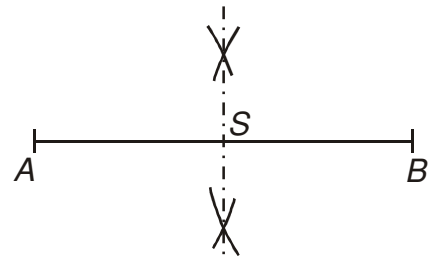


4.3.5 Dělení úseček

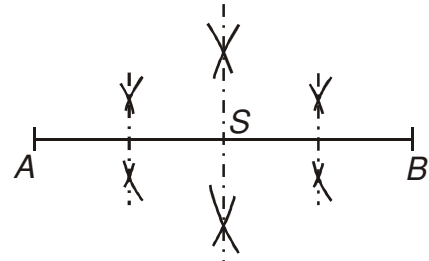
Předpoklady: 040304

Př. 1: Jak je možné pomocí kružítka a pravítka rozdělit libovolnou úsečku bez měření na dva stejné díly? Na jaké další počty stejných dílů je možné tímto postupem úsečky dělit?

Libovolnou úsečku můžeme rozdělit na dva díly tím, že na ní vyznačíme její střed.



Stejným způsobem můžeme dělit vzniklé poloviny.

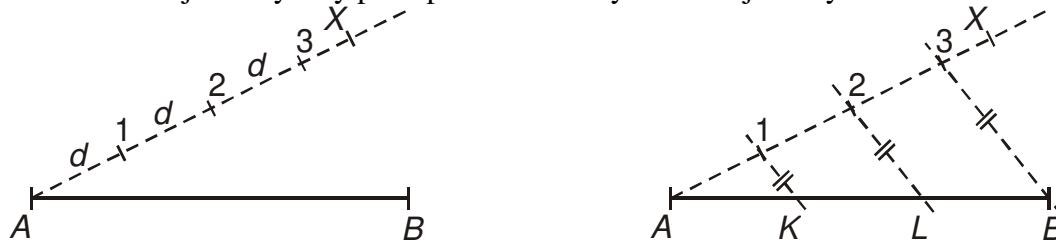


Úsečku můžeme dělit na 2, 4, 8, 16, ... dílů (počty odpovídající mocninám dvou).

Př. 2: Najdi postup, kterým je možné bez měření rozdělit úsečku na libovolný počet stejných dílů.

Pedagogická poznámka: Zatímco první příklad vyřeší téměř všichni, u druhého se zatím úspěšný řešitel neobjevil. Proto nečekáme dlouho a přejdeme na následující příklad.

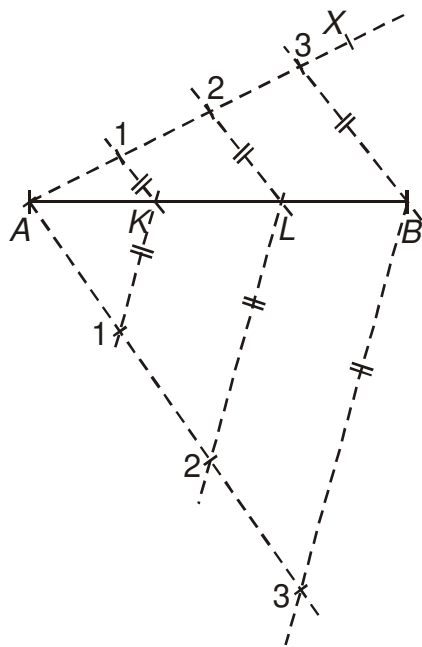
Př. 3: Na obrázcích je zachycený postup dělení úsečky na tři stejné díly.



Na čem je postup založený? Je výsledek dělení závislý na volbě pomocného bodu X ? Ověř pochopení postupu tím, že příklad přerýsuješ do sešitu (libovolnou úsečku AB rozdělíš bez měření na tři stejné díly). Zopakuj postup do stejného obrázku ještě jednou s jiným bodem X . Zapiš slovy postup. Dokaž, že body K a L opravdu dělí úsečku AB na třetiny.

Postup je založený na podobnosti trojúhelníků: platí $AB3 \sim AL2 \sim AK1$.

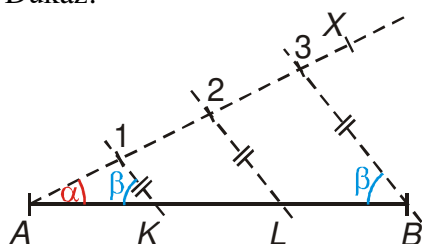
Na volbě pomocného bodu X nezáleží (stejně jako na volbě vzdálenosti d).



Postup rozdělení úsečky na n stejných dílů:

1. Narýsujeme úsečku AB .
2. Narýsujeme polopřímku AX , na které neleží úsečka AB .
3. Na polopřímce AX vyznačíme n stejných dílů o libovolné vhodné délce d .
4. Konečný bod posledního dílu spojíme s bodem B úsečky AB .
5. Každý dalším bodem vyznačeným na polopřímce AX vedeme rovnoběžku s přímkou narýsovanou v předchozím bodu.
6. Rovnoběžky dělí úsečku AB na požadovaný počet dílů.

Důkaz:



Trojúhelník $AK1$ je podobný trojúhelníku $AB3$ podle věty uu :

- shodný společný úhel α ,
- shodné úhly $AK1$ a $AB3$ (β) (shodné úhly rovnoběžek protáých příčkou).

Trojúhelník $AK1$ je podobný trojúhelníku $AB3$ s koeficientem podobnosti $\frac{1}{3}$ (platí

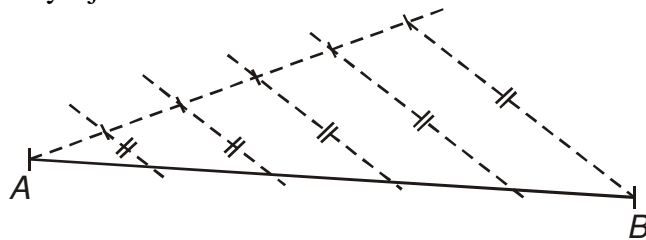
$$|A1| = \frac{1}{3}|A3|) \Rightarrow \text{musí platit } |AK| = \frac{1}{3}|AB|.$$

Podobně můžeme dokázat z podobnosti trojúhelníků $AL2$ a $AB3$, že $|AL| = \frac{1}{3}|AB|$.

Pedagogická poznámka: V původním obrázku při první hodině byl na obrázku bod X náhodou zakreslen tak, že se zdálo, že je úsečka AX rozdělena na čtyři stejné díly, což část žáků vedlo k tomu, že ji dělili pomocí kružítka na čtvrtiny, což ukazuje na zásadní nepochopení postupu na obrázku. Někteří si také nevšimli, že přímka z bodu 3 prochází bodem B a směr rovnoběžek volili náhodně (projevilo se to ve chvíli, kdy měli dělit úsečku pomocí druhé pomocné polopřímky). Většina třídy však obrázky pochopila správně a byla schopna příklady řešit bez větších problémů.

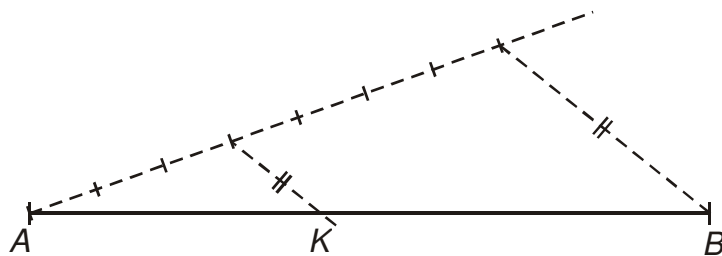
Př. 4: Narýsuj libovolnou úsečku AB a rozděl ji na pět stejných dílů.

Použijeme stejný postup jako v předchozím příkladu, pouze na pomocné polopřímce narýsujeme 5 dílů.



Př. 5: Narýsuj úsečku AB , $|AB| = 9 \text{ cm}$. Na úsečce vyznač bod K , tak aby platilo

$$|AK| = \frac{3}{7}|AB|.$$

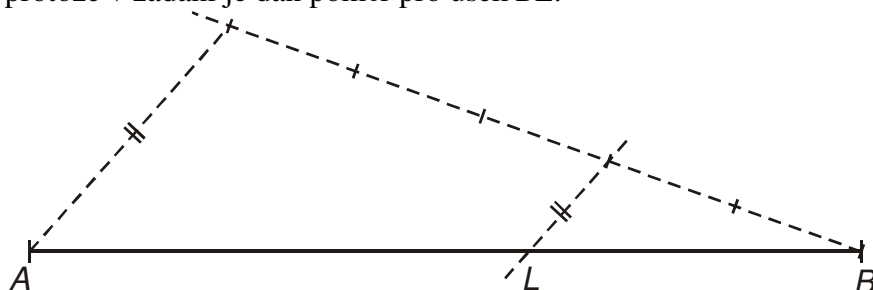


Pedagogická poznámka: S příkladem nejsou problémy, mimo to, že někteří žáci zbytečně rýsují sedm rovnoběžek a dělí úsečky na sedm dílů.

Př. 6: Narýsuj úsečku AB , $|AB|=11$ cm. Na úsečce vyznač bod L , tak aby platilo

$$|BL| = \frac{2}{5}|AB|.$$

Podobný příklad jako předchozí. Pomocnou přímkou nebudeme kreslit z bodu A , ale z bodu B , protože v zadání je dán poměr pro úsek BL .

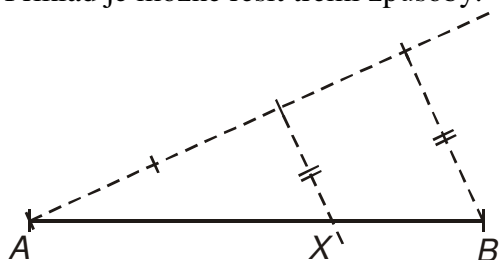


Pedagogická poznámka: Většina žáků rýsuje od bodu A podle poměru $|AL| = \frac{3}{5}|AB|$, což je samozřejmě také správně, ale je třeba ukázat i řešení v učebnici, aby bylo jasné, že pomocnou polopřímku můžeme kreslit z libovolné strany.

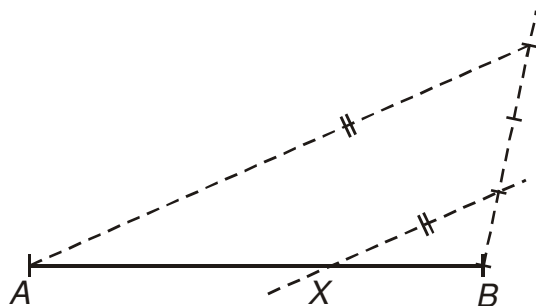
Př. 7: Úsečku AB rozděl bodem X na dvě části tak, aby platilo: $|AX|:|BX|=2:1$. Najdi co nejvíce různých způsobů, jak na řešení využít podobnost trojúhelníků.

Bod X dělí úsečku na dvě části o dvou (úsečka AX) a jednom (úsečka BX) dílu \Rightarrow celá úsečka má tři díly.

Příklad je možné řešit třemi způsoby.

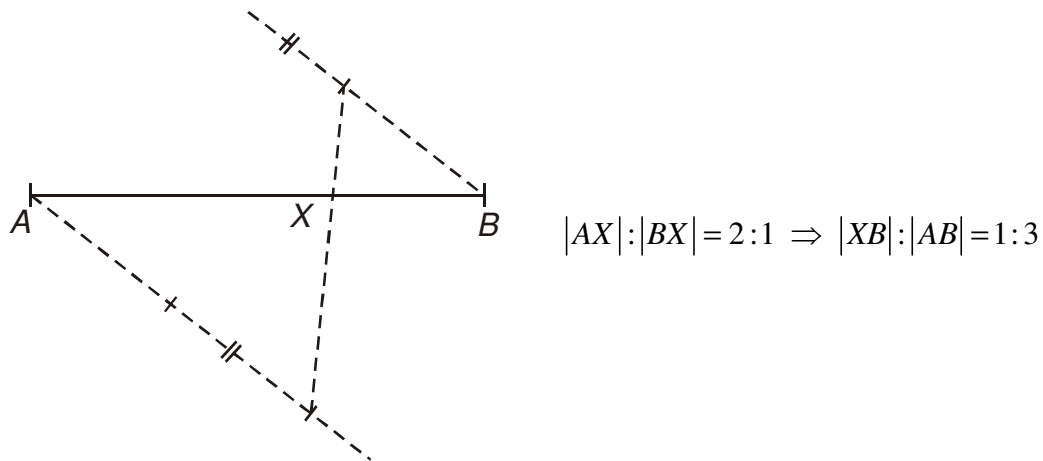


$$|AX|:|BX|=2:1 \Rightarrow |AX|:|AB|=2:3$$

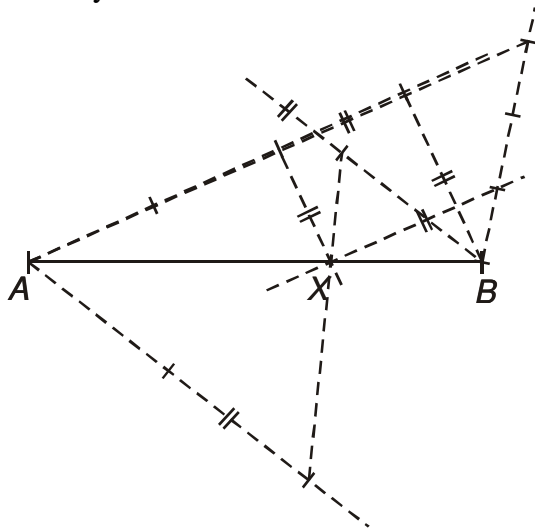


$$|AX|:|BX|=2:1 \Rightarrow |XB|:|AB|=1:3$$

Příklad můžeme vyřešit i přímo pouze poměrem $|AX|:|BX|=2:1$, tím, že nakreslíme dva trojúhelníky navzájem podobné s tímto poměrem.



Dodatek: V počítači můžeme všechny tři obrázky snadno položit na sebe a přesvědčit se, že všechny tři konstrukce vedou k nalezení stejného bodu.



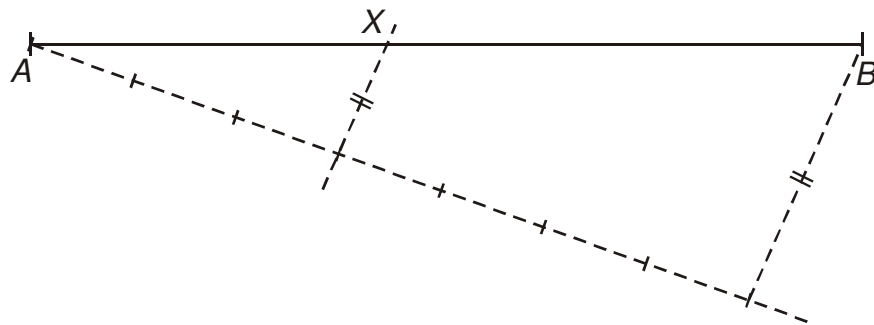
Př. 8: Úsečku AB rozděl bodem X na dvě části tak, aby platilo:

a) $|AX|:|BX| = 3:4$

b) $|AB|:|BX| = 5:2$

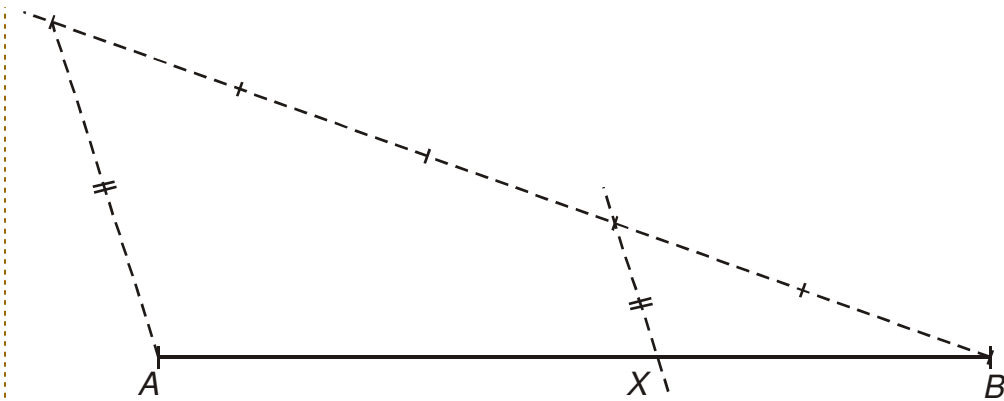
a) $|AX|:|BX| = 3:4$

Úsečku AB dělíme na sedm dílů.



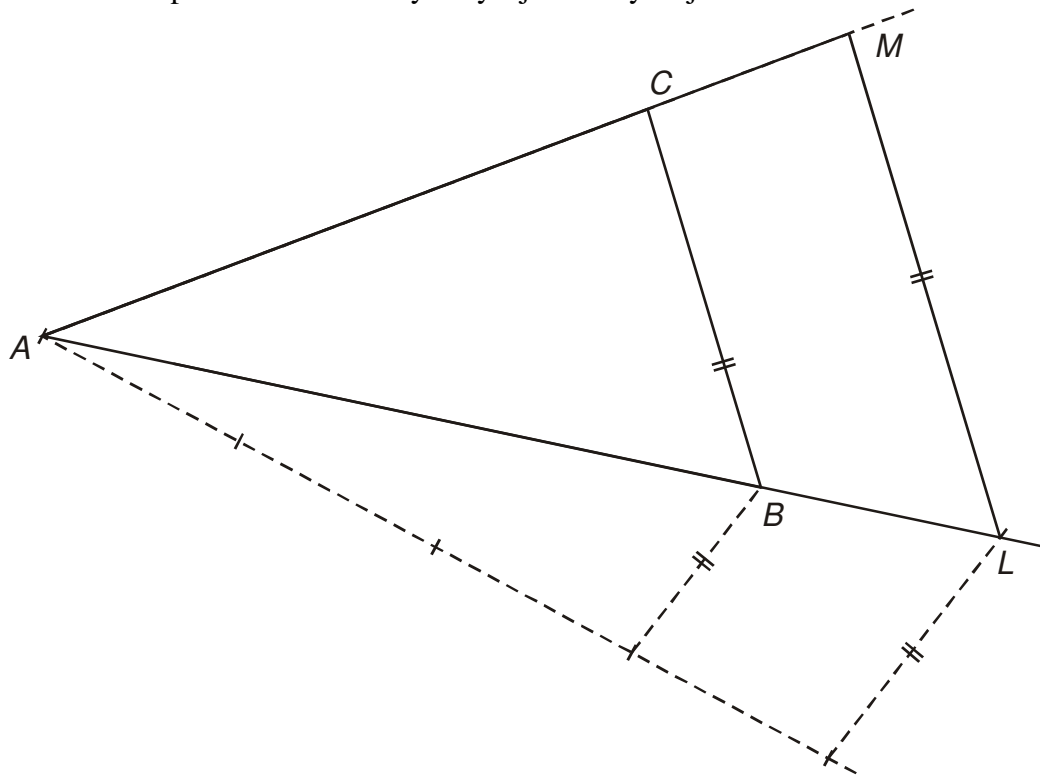
b) $|AB|:|BX| = 5:2$

Úsečku AB dělíme na pět dílů (z bodu B).



Př. 9: Narýsuj libovolný trojúhelník ABC . Narýsuj co nejúsporněji trojúhelník KLM , který je s trojúhelníkem ABC podobný s koeficientem podobnosti $k = \frac{4}{3}$.

Trojúhelník KLM narýsujeme tak, aby body K a A ležely na sobě \Rightarrow zvětšíme úsečku AB na úsečku KL a pomocí rovnoběžky dorýsujeme celý trojúhelník KLM .



Shrnutí: Pomocí podobnosti můžeme snadno rozdělit libovolnou úsečku na libovolný počet shodných dílů.