

4.3.9 Sinus ostrého úhlu I

Předpoklady: 040308

Správně vyplněné hodnoty funkce $\frac{a}{c}$ z minulé hodiny.

α		10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	
poměr $\frac{a}{c}$		0,17	0,34	0,50	0,64	0,77	0,87	0,94	0,98	

Funkce poměr $\frac{a}{c}$ se nazývá sinus x (zkráceně se píše $\sin x = \frac{a}{c}$). Patří mezi nejdůležitější matematické funkce a je obsažena na téměř každé kalkulačce.

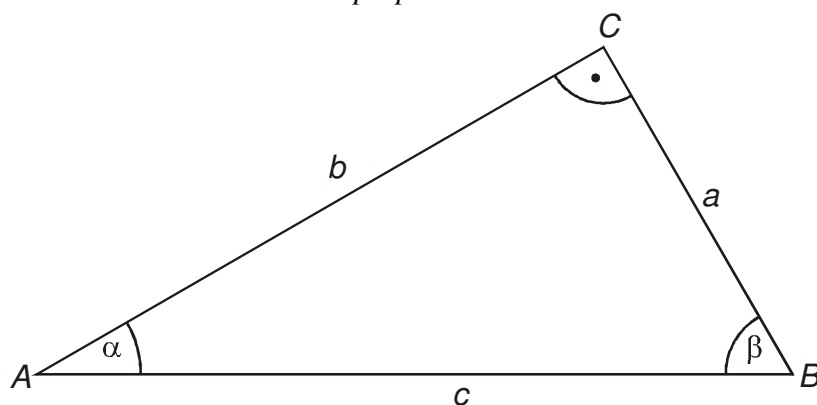
Píšeme: $\sin 30^\circ = 0,5$, $\sin 80^\circ \doteq 0,98$, ...

Postup určování hodnoty funkce sinus pomocí poměru $\frac{a}{c}$ platí pouze v pravoúhlém trojúhelníku ABC , pro který platí $\gamma = 90^\circ$. Kdyby pravý úhel ležel u vrcholu B , přestalo by platit, že $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, proto se funkce sinus zavádí spíše pomocí významu stran, které v našem

poměru $\frac{a}{c}$ vystupují:

- strana c leží proti pravému úhlu, je v trojúhelníku nejdelší a označujeme ji jako **přeponu**,
- strana a leží proti úhlu α a je tedy **protilehlou odvěsnou**,

\Rightarrow platí tedy $\sin \alpha = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepona}}$.



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

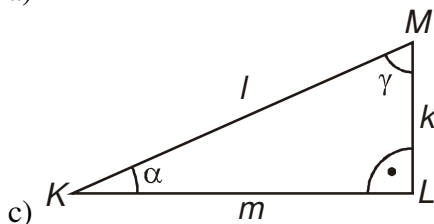
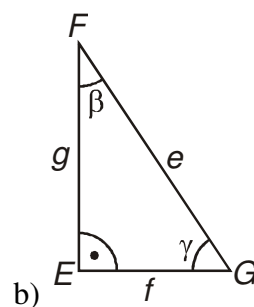
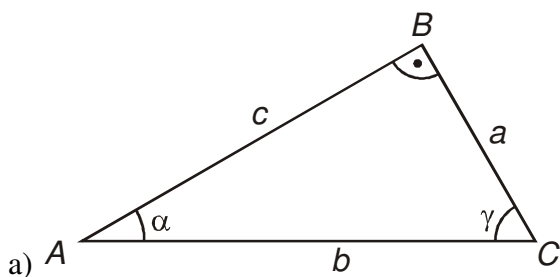
$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepona}}$$

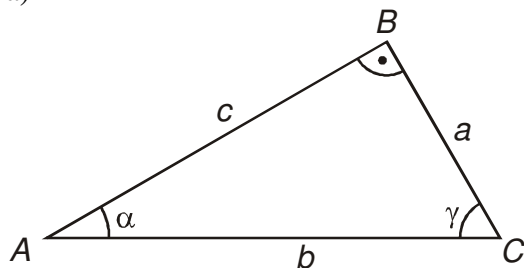
$$\sin \beta = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepona}}$$

Funkce sinus se využívá k měření úhlu, patří tedy mezi **goniometrické funkce** (z řeckého gonío - úhel).

Př. 1: Na obrázcích jsou zakresleny trojúhelníky s vyznačenými úhly. Zapiš, čemu se rovnají hodnoty funkce sinus pro vyznačené úhly.

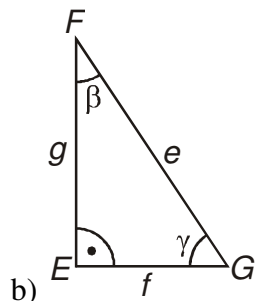


a)



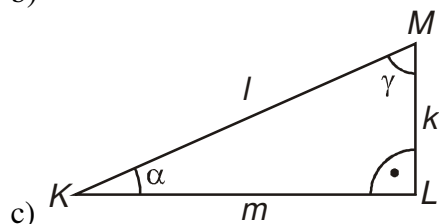
$$\sin \alpha = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepona}} = \frac{a}{b}$$

$$\sin \gamma = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepona}} = \frac{c}{b}$$



$$\sin \beta = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepona}} = \frac{f}{e}$$

$$\sin \gamma = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepona}} = \frac{g}{e}$$



$$\sin \alpha = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepona}} = \frac{k}{l}$$

$$\sin \gamma = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepona}} = \frac{m}{l}$$

Př. 2: Zkontroluj výsledky v tabulce hodnot funkce sinus pomocí své kalkulačky. Pokud se Tvé výsledky (nebo výsledky některého z kamarádů) liší od hodnot v tabulce, zjisti, co vše musí být na kalkulačce správně nastaveno, aby vycházely správné výsledky.

Velikost úhlu se udává v různých jednotkách \Rightarrow na kalkulačce musí být nastaveno, že jednotkami, které používáme, jsou stupně (na display se zobrazuje písmenko D nebo zkratka DEG).

Přepínání z jiných jednotek se provádí většinou pomocí tlačítka MODE (většinou se podpovídajícím počtu stisků objeví nabídka DEG RAD GRAD, ze které je třeba vybrat DEG).

Pedagogická poznámka: Většina žáků má kalkulačku nastavenou správně. Pokud se u určité části třídy kalkulačka nastavená na radiány nebo grad nevyskytuje, nějakou si půjčím a tajně ji přenastavím sám. U kalkulaček na mobilech je situace složitější, některé připomínají kalkulačky i způsobem přepínání, u dalších se jednotky úhlu přepínají v nastaveních.

Př. 3: Urči pomocí kalkulačky s přesností na desetitisíciny.

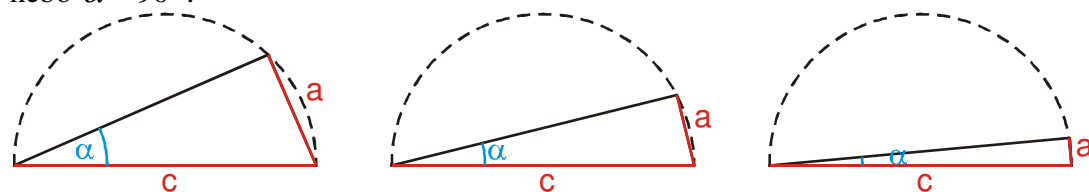
- a) $\sin 42^\circ$ b) $\sin 86,3^\circ$ c) $\sin 23^\circ 45'$ d) $\sin 57^\circ 26' 48''$

Při zadávání minut a vteřin, buď můžeme využít na kalkulačce tlačítko $^{\circ}''$ (jinde je značeno DMS) nebo můžeme převést vteřiny a minuty na stupně).

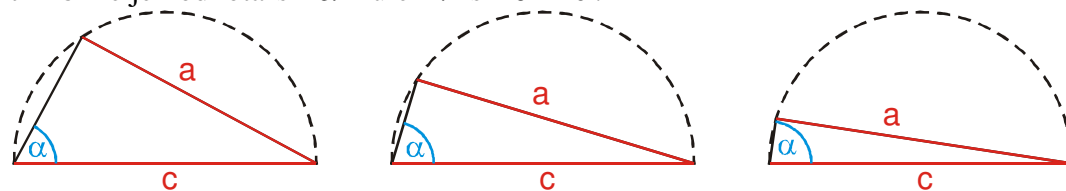
- a) $\sin 42^\circ = 0,6691$ b) $\sin 86,3^\circ = 0,9979$
 c) $\sin 23^\circ 45' = 0,4027$ d) $\sin 57^\circ 26' 48'' = 0,8429$

Př. 4: Je možné určit pomocí pravoúhlého trojúhelníku hodnoty $\sin 0^\circ$ a $\sin 90^\circ$? Navrhni vhodné hodnoty $\sin 0^\circ$ a $\sin 90^\circ$. Dopln tabulku.

Určit je nemůžeme. Nejde sestrojít pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem γ a úhlem $\alpha = 0^\circ$ nebo $\alpha = 90^\circ$.



Z minulé hodiny víme, že při zmenšování α se poměr $\frac{a}{c}$ zmenšuje (když se úhel zmenšuje k nule, tak hodnota poměru $\frac{a}{c}$ se také zmenšuje k nule) \Rightarrow čím blíže je hodnota α k nule, tím blíže je hodnota $\sin \alpha$ nule $\Rightarrow \sin 0^\circ = 0$.

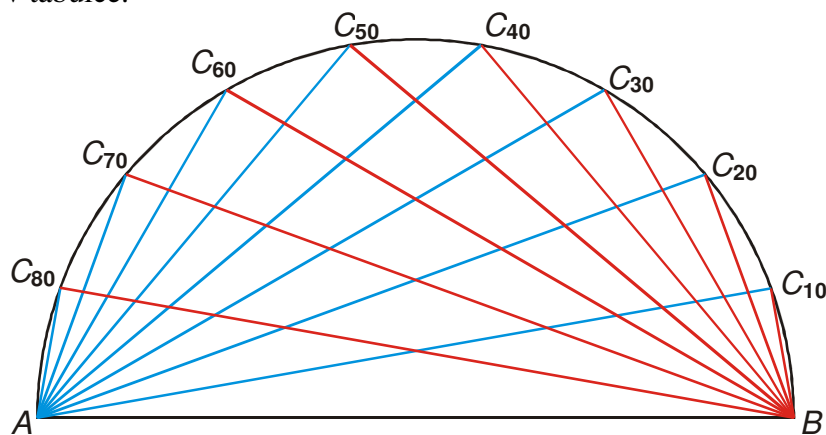


Při zvětšování α se poměr $\frac{a}{c}$ zvětšuje, délky stran a a c se blíží k sobě \Rightarrow hodnota poměru $\frac{a}{c}$ se blíží k jedné $\Rightarrow \sin 90^\circ = 1$.

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
poměr $\frac{a}{c}$	0	0,17	0,34	0,50	0,64	0,77	0,87	0,94	0,98	1

Pedagogická poznámka: Následující příklad řeší žáci samostatně s papírky, které jim předem vytisknu a rozdám.

Př. 5: Jedním z nejúspornějších způsobů jak bez kalkulačky určit hodnoty funkce $\sin x$ je následující obrázek. Jak se obrázek k určování hodnoty funkce $\sin x$ používá? Proč je výhodnější než rýsování trojúhelníků. Překontroluj pomocí obrázku hodnoty v tabulce.



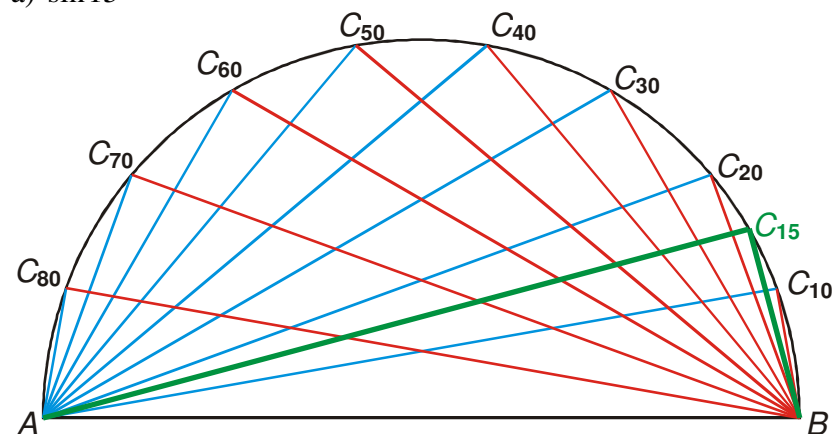
Vrcholy $C_{10} \dots C_{80}$ představují vrcholy pravoúhlých trojúhelníků s odpovídajícími hodnotami úhlu α u vrcholu A \Rightarrow změřením délek BC_{10} , AB a jejich vydělením tak můžeme určit hodnotu $\sin 10^\circ$.

$$\sin 10^\circ = \frac{|BC_{10}|}{|AB|} = \frac{1,7}{10} = 0,17$$

Hodnota $|AB|$ se rovná 10 cm \Rightarrow nemusíme ji u dalších hodnot ani měřit ani s ní počítat, stačí změřit hodnotu $|BC_x|$ a vydělit ji deseti.

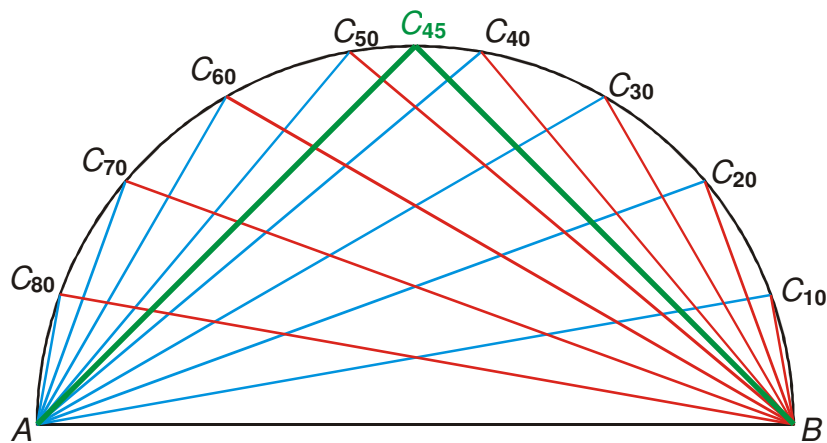
Př. 6: Urči pomocí obrázku hodnoty: a) $\sin 15^\circ$ b) $\sin 45^\circ$ c) $\sin 68^\circ$.

a) $\sin 15^\circ$



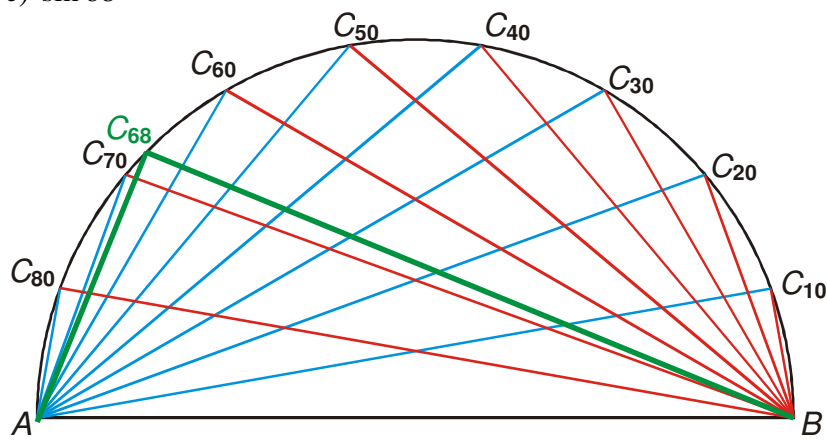
$$|BC_{15}| = 2,6 \text{ cm} \Rightarrow \sin 15^\circ = 0,26$$

b) $\sin 45^\circ$



$$|BC_{45}| = 7,1 \text{ cm} \Rightarrow \sin 45^\circ = 0,71$$

c) $\sin 68^\circ$



$$|BC_{68}| = 9,3 \text{ cm} \Rightarrow \sin 68^\circ = 0,93$$

Př. 7: Při doplňování tabulky v minulé hodině nebylo nutné rýsovat dohromady osm trojúhelníků. Stačilo nakreslit jenom čtyři. Proč? Jak bychom získali ze čtyř trojúhelníků hodnoty funkce sinus pro osm různých úhlů?

Trojúhelník s jedním úhlem 10° má druhý úhel $80^\circ \Rightarrow$ můžeme z něj určit $\sin 10^\circ$ i $\sin 80^\circ \Rightarrow$ stačí narýsovat trojúhelníky s úhly 10° , 20° , 30° a 40° .

Shrnutí: Pro goniometrickou funkci sinus platí $\sin x = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepona}}$.