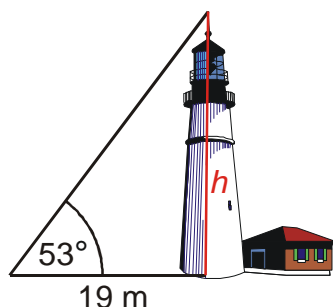


4.3.12 Tangens a kotangens

Předpoklady: 040311

Př. 1: Úhel, pod kterým je možné ze pozorovat vrchol věže ze vzdálenosti 19 m od její paty, byl změřen na 53° od vodorovné roviny. Jak je věž vysoká?



Z obrázku je vidět, že v nakresleném pravoúhlém trojúhelníku známe jednu odvěsnu a potřebujeme najít délku druhé \Rightarrow nemůžeme použít ani funkci $\sin \alpha$ ani funkci $\cos \alpha$ (obě představují poměr vůči přeponě) \Rightarrow potřebujeme zavést další funkci.

Př. 2: Jak by měla být definována funkce potřebná k vypočtení předchozího příkladu?

Potřebujeme funkci, která bude z hodnoty úhlu určovat hodnotu poměru obou odvěsen.

Takové funkce jsou dvě, známější je funkce tangens.

Funkci, která udává poměr protilehlé a přilehlé odvěsny v pravoúhlém trojúhelníku

s vnitřním úhlem α nazýváme tangens. Píšeme $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přilehlá odvěsna}}$.

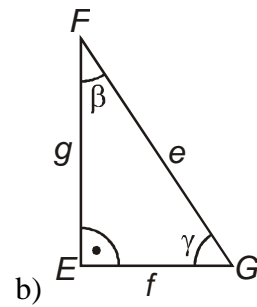
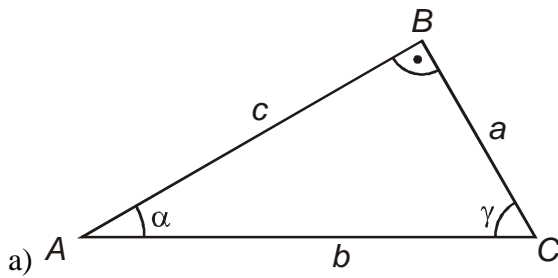
Druhou funkcí, kterou bychom mohli použít je funkce kotangens, která udává poměr přilehlé a protilehlé odvěsny v pravoúhlém trojúhelníku s vnitřním úhlem α . Píšeme

$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{protilehlá odvěsna}}$. Protože funkce kotangens nám nepřináší žádné nové možnosti

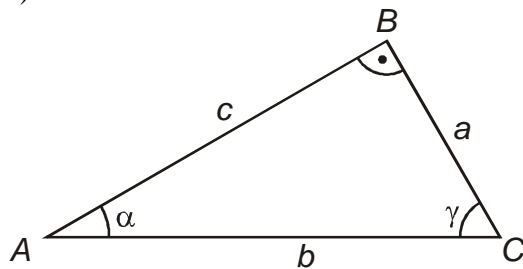
při řešení reálných problémů, budeme se dále zabývat pouze funkcí tangens.

Dodatek: Většina světa nepoužívá pro tangens zkratku $\operatorname{tg} \alpha$, místo ní píše $\tan \alpha$, podobně u kotangens se častěji setkáte s $\cot \alpha$.

Př. 3: Na obrázcích jsou zakresleny trojúhelníky s vyznačenými úhly. Zapiš čemu se rovnají hodnoty funkce tangens pro vyznačené úhly.

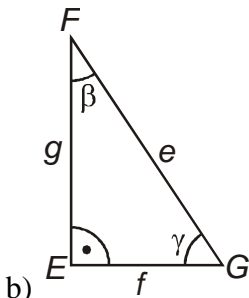


a)



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přilehlá odvěsna}} = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přilehlá odvěsna}} = \frac{c}{b}$$



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přilehlá odvěsna}} = \frac{f}{g}$$

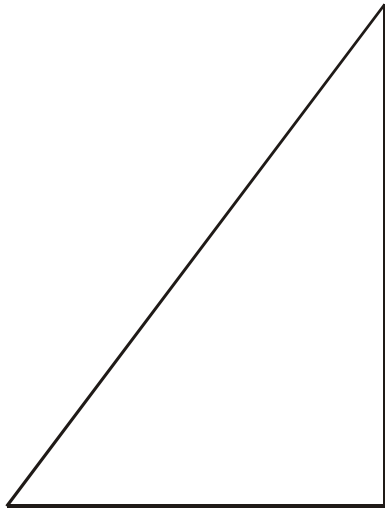
$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přilehlá odvěsna}} = \frac{e}{f}$$

Př. 4: Narýsuj vhodný trojúhelník, ze kterého bez kalkulačky zjistíš hodnotu $\operatorname{tg} 53^\circ$. Získanou hodnotu využij na vypočtení úvodního příkladu.

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přilehlá odvěsna}} \Rightarrow$ potřebujeme narýsovat trojúhelník, u kterého přilehlá odvěsna

k úhlu 53° bude mít délku, kterou se snadno dělí (nejlépe tedy 10 cm) \Rightarrow rýsujeme pravoúhlý trojúhelník s odvěsnou 10 cm a přilehlým úhlem 53° .

Protože v takový trojúhelník je poměrně velký, narýsujeme v učebnici trojúhelník o poloviční velikosti (s přilehlou odvěsnou o délce 5 cm).



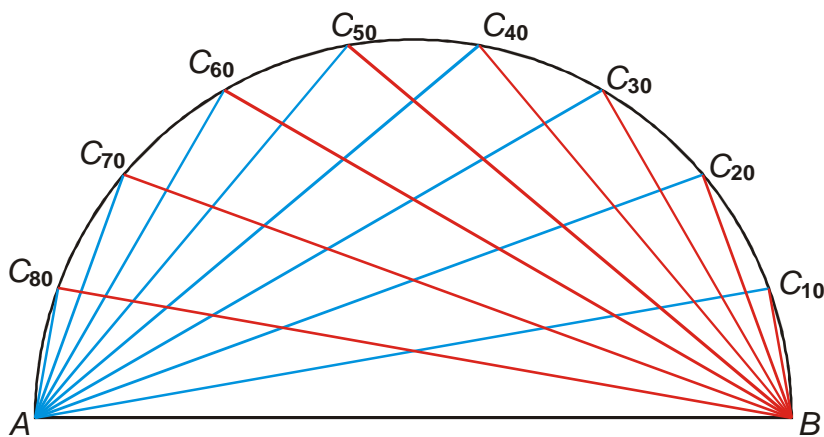
Protilehlá odvěsna má velikost 6,6 cm $\Rightarrow \operatorname{tg} 53^\circ = \frac{6,6}{5} = 6,6 \cdot 0,2 = 1,32$.

Vypočtení úvodního příkladu: $\operatorname{tg} 53^\circ = \frac{h}{19} \Rightarrow h = 19 \cdot \operatorname{tg} 53^\circ = 25,08 \text{ m} \doteq 25 \text{ m}$.

Věž z úvodního příkladu má výšku 25 m.

Př. 5: Dopln v tabulce první dvě řádky hodnotami z předchozích dvou hodin. Najdi způsob, jak využít obrázek s půlkruhem pro určování hodnot funkce $\operatorname{tg} \alpha$. Jak souvisí hodnoty funkcí $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ a $\operatorname{tg} \alpha$? Dopln poslední řádek tabulky.

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\sin \alpha$										
$\cos \alpha$	1									
$\operatorname{tg} \alpha$										



Platí: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přilehlá odvěsna}} \Rightarrow$ pro určení $\operatorname{tg} 10^\circ$ změříme úsečky BC_{10} (protilehlá

odvěsna) a AC_{10} (přilehlá odvěsna) a spočteme podíl $\frac{|BC_{10}|}{|AC_{10}|}$. Ve skutečnosti nemusíme obě

úsečky ani měřit, protože jejich délky již máme zapsané v tabulce jako hodnoty funkcí $\sin \alpha$

(úsečka BC_x) a $\cos \alpha$ (úsečka AC_x) \Rightarrow platí $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\sin \alpha$	0	0,17	0,34	0,50	0,64	0,77	0,87	0,94	0,98	1
$\cos \alpha$	1	0,98	0,94	0,87	0,77	0,64	0,50	0,34	0,17	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	0,18	0,36	0,58	0,84	1,19	1,73	2,75	5,57	nejde

Vztah $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ dokážeme pomocí stran v trojúhelníku: $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$.

Př. 6: Urči pomocí kalkulačky s přesností na desetitisíciny.

- a) $\operatorname{tg} 89^\circ$ b) $\operatorname{tg} 89,5^\circ$ c) $\operatorname{tg} 89^\circ 59'$ d) $\operatorname{tg} 89^\circ 59' 59''$

Co je na hodnotách zajímavého? Vysvětli.

Při zadávání minut a vteřin, buď můžeme využít na kalkulačce tlačítko $^{\circ}''$ (jinde je značeno DMS) nebo můžeme převést vteřiny a minuty na stupně).

- a) $\operatorname{tg} 89^\circ = 57,2900$ b) $\operatorname{tg} 89,5^\circ = 114,5887$

- c) $\operatorname{tg} 89^\circ 59' = 3\,437,7467$ d) $\operatorname{tg} 89^\circ 59' 59'' = 206\,264,7897$

Hodnoty funkce $\operatorname{tg} \alpha$ se pro α , blížíci se 90° velmi rychle zvětšují. Je to jasné ze vzorce

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ - dělíme čísla skoro rovná 1, velmi malými čísly, která se blíží nule \Rightarrow

získáváme čím dál větší čísla.

Př. 7: Urči pomocí kalkulačky úhel, pro který platí: a) $\operatorname{tg} \alpha = 0,7$, b) $\operatorname{tg} \beta = 3,2$.

Podobně jako u předchozích goniometrických funkcí využijeme tlačítko \tan^{-1} .

- a) $\operatorname{tg} \alpha = 0,7 \Rightarrow \alpha = 34^\circ 59' 31''$

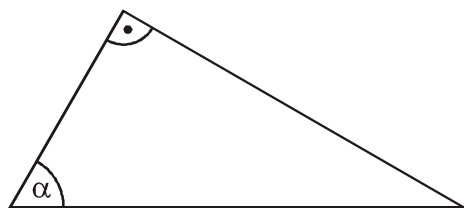
- b) $\operatorname{tg} \beta = 3,2 \Rightarrow \beta = 72^\circ 38' 46''$

Př. 8: Bez použití kalkulačky zjistí, pro který úhel platí $\operatorname{tg} \alpha = 1$. Ověř pomocí kalkulačky.

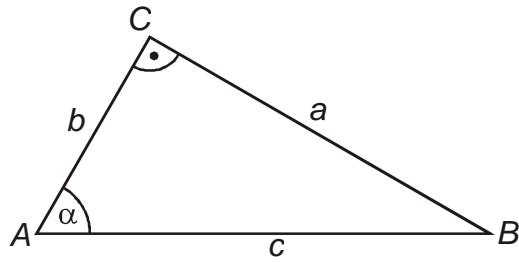
$\operatorname{tg} \alpha = 1 \Rightarrow$ obě odvěsny musí mít stejnou délku \Rightarrow jde o rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník \Rightarrow nepravé úhly jsou shodné \Rightarrow mají velikost 45° .

Platí $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$.

Př. 9: V načrtnutém trojúhelníku porovnej hodnoty $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ a $\operatorname{tg} \alpha$ pro vyznačený úhel α .



V obrázku si označíme vrcholy a strany.



Z obrázku vidíme: $a > b \Rightarrow \sin \alpha = \frac{a}{c} > \cos \alpha = \frac{b}{c}$.

Porovnáváme $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ a $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$, čitatele obou zlomků jsou si rovny, odvěsna b je menší

než přepona $c \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} > \sin \alpha = \frac{a}{c}$.

U načrtnutého trojúhelníku platí: $\operatorname{tg} \alpha > \sin \alpha > \cos \alpha$.

Př. 10: Využij hodnoty funkce tangens získané v předchozích příkladech k nakreslení grafu funkce $y = \operatorname{tg} \alpha$, pro x $0 \leq \alpha < 90^\circ$.

Shrnutí: Funkce $\operatorname{tg} \alpha$ udává poměr protilehlé a přilehlé odvěsny.