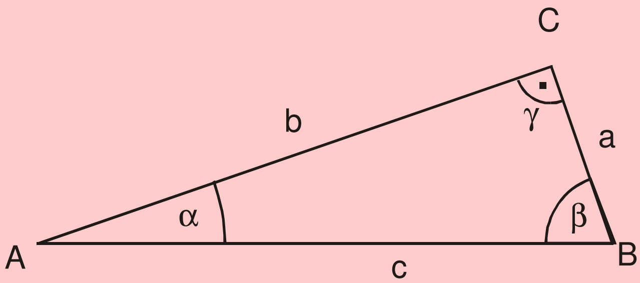
4.3.13 Úlohy o pravoúhlém trojúhelníku I

Předpoklady:

Pedagogická poznámka: Hodina má dva cíle:
nalezení správné funkce a její použití k výpočtu,
dodržování štábní kultury.
Proto je nutné hned před prvním příkladem upozornit, že je nutné dodržovat zásady pod červeným rámečkem, a poté celou hodinu také hlídat.

Přehled goniometrických funkcí pravoúhlého trojúhelníka:



sinus: $\sin\alpha = \frac{protilehlá}{přepona} = \frac{a}{c}$

cosinus: $\cos\alpha = \frac{přilehlá}{přepona} = \frac{b}{c}$

tangens: $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{protilehlá}{přilehlá} = \frac{a}{b}$

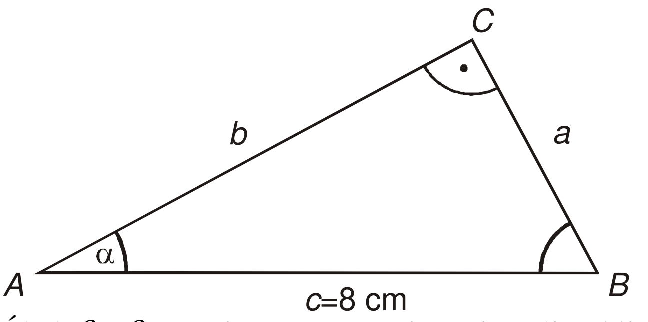
kotangens: $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{přilehlá}{protilehlá} = \frac{b}{a}$

Pomocí goniometrických funkcí a Pythagorovy věty $c^2 = a^2 + b^2$ dokážeme dopočítat délky stran a velikosti úhlů v každém pravoúhlém trojúhelníku, ve kterém známe alespoň dva údaje (mezi kterými je alespoň jedna délka).

Dohody při dopočítávání trojúhelníků:

- Všechny hodnoty délek budeme uvádět s přesností na dvě desetinná čísla.
- Všechny hodnoty úhlů budeme uvádět s přesností na minuty.
- Protože vypočtené hodnoty jsou většinou zaokrouhlené (a tedy nepřesné), řešíme příklady tak, abychom všechny údaje určili ze zadaných hodnot. Druhou výhodou tohoto postupu je skutečnost, že chyba při výpočtu první hodnoty tak neznamená automaticky chybu při výpočtu ostatních.
- Délky nebo úhly ze vztahu nejdříve vyjádříme, poté do vyjádřeného vztahu dosadíme a celý dosazený vztah najednou zadáme do kalkulačky (čímž zaručíme nejvyšší možnou přesnost výsledků a vyhneme se chybám při opisování mezivýsledků do sešitu).

Př. 1: Pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem γ a s úhlem $\alpha = 35°$ má velikost přepony $c = 8\,\text{cm}$. Urči jeho ostatní strany a úhly.

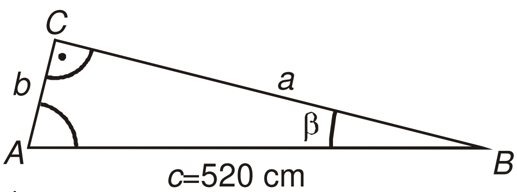


Úhel β: $\beta = 180° - \gamma - \alpha = 180° - 90° - 35° = 55°$.

Strana a: $\sin\alpha = \dfrac{a}{c} \Rightarrow a = \sin\alpha \cdot c = \sin 35° \cdot 8 = 4{,}59\,\text{cm}$.

Strana b: $\cos\alpha = \dfrac{b}{c} \Rightarrow b = \cos\alpha \cdot c = \cos 35° \cdot 8 = 6{,}55\,\text{cm}$.

Př. 2: Pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem γ a s úhlem $\beta = 15°$ má velikost přepony $c = 520\,\text{cm}$. Urči jeho ostatní strany a úhly.

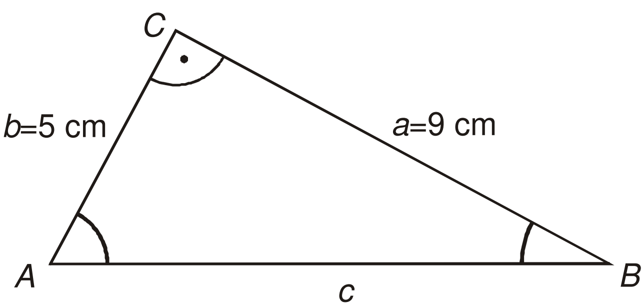


Úhel α: $\alpha = 180° - \gamma - \beta = 180° - 90° - 15° = 75°$.

Strana a: $\cos\beta = \dfrac{a}{c} \Rightarrow a = \cos\beta \cdot c = \cos 15° \cdot 520 = 502{,}28\,\text{cm}$

Strana b: $\sin\beta = \dfrac{b}{c} \Rightarrow b = \sin\beta \cdot c = \sin 15° \cdot 520 = 134{,}59\,\text{cm}$.

Př. 3: Pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem γ má odvěsny o velikostech $a = 9\,\text{cm}$ a $b = 5\,\text{cm}$. Urči jeho zbývající strany a úhly.

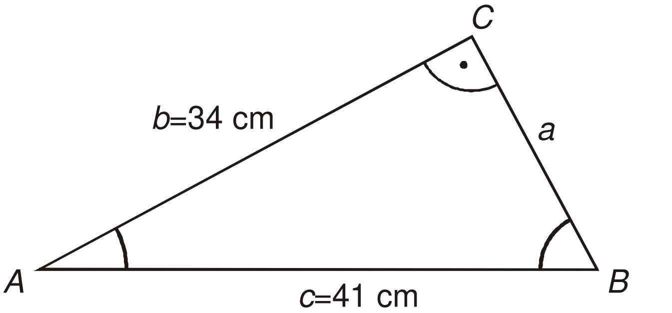


Strana c: $c^2 = a^2 + b^2 = 9^2 + 4^2 = 81 + 25 = 106 \;\Rightarrow\; c = \sqrt{106}\,\text{cm} = 10{,}30\,\text{cm}$.

Úhel α: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{9}{5} \;\Rightarrow\; \alpha = \text{tg}^{-1}\left(\dfrac{9}{5}\right) = 60°57'$.

Úhel β: $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a} = \frac{5}{9} \Rightarrow \beta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{5}{9}\right) = 29°3'$.

Př. 4: Přepona c pravoúhlého trojúhelníku ABC má délku 41 cm. Urči zbývající strany a úhly trojúhelníku, jestliže odvěsna b má délku 34 cm.

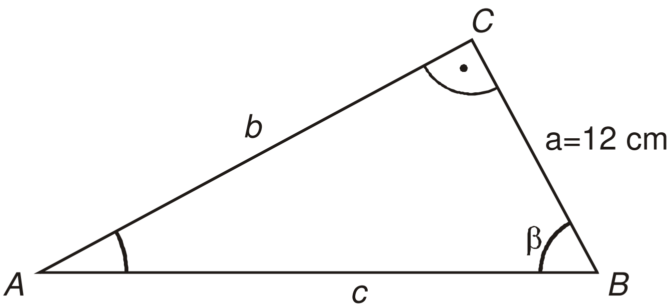


Strana a: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = c^2 - b^2 = 41^2 - 34^2 = 525 \Rightarrow$
$a = \sqrt{525}\text{ cm} = \sqrt{25\cdot 21}\text{ cm} = 5\sqrt{21}\text{ cm} = 22{,}91\text{ cm}$.

Úhel α: $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{34}{41} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{34}{41}\right) = 33°59'$.

Úhel β: $\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{34}{41} \Rightarrow \beta = \sin^{-1}\left(\frac{34}{41}\right) = 56°1'$.

Př. 5: Pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem γ a s úhlem $\beta = 54°23'$ má velikost odvěsny $a = 12\text{ cm}$. Urči jeho ostatní strany a úhly.

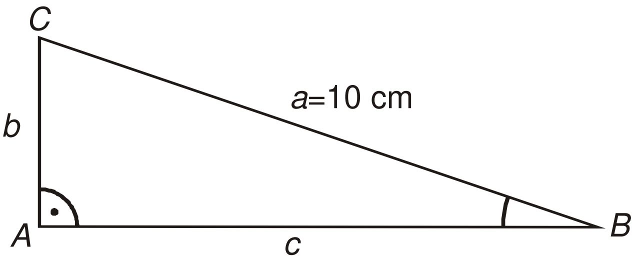


Úhel α: $\alpha = 180° - \gamma - \beta = 180° - 90° - 54°23' = 35°37'$.

Strana b: $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a} \Rightarrow b = \operatorname{tg}\beta \cdot a = \sin 54°23' \cdot 12\text{ cm} = 16{,}75\text{ cm}$.

Strana c: $\cos\beta = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\cos\beta} = \frac{12}{\cos 54°23'}\text{cm} = 20{,}61\text{ cm}$.

Př. 6: Přepona v pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem α a s úhlem $\beta = 21°$ má velikost 7,4 cm. Urči jeho ostatní strany a úhly.



Pravý úhel α $\Rightarrow$ přepona $a = 7,4\,\text{cm}$ $\Rightarrow$ vyjádření poměrů ve stranách bude jiné než v předchozích příkladech.
Úhel γ: $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 90° - 21° = 69°$.

Strana b: $\sin\beta = \frac{b}{a} \Rightarrow b = \sin\beta \cdot a = \sin 21° \cdot 7,4 = 2,65\,\text{cm}$

Strana c: $\cos\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow c = \cos\beta \cdot a = \cos 21° \cdot 7,4 = 6,91\,\text{cm}$.

Shrnutí: Pokud chceme přesné výsledky je vhodné používat pouze zadané hodnoty, vyjadřovat obecně a do kalkulačky dosazovat najednou.