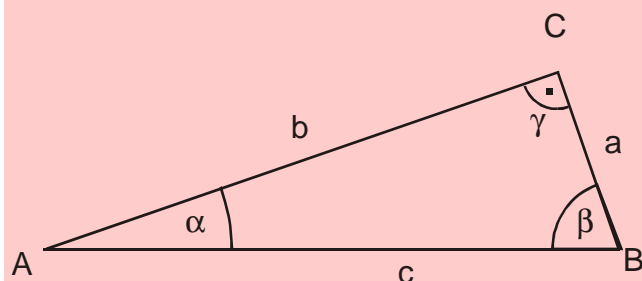


4.3.13 Goniometrické funkce ostrého úhlu I

Předpoklady:

Přehled goniometrických funkcí pravoúhlého trojúhelníka:



$$\text{sinus: } \sin \alpha = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{cosinus: } \cos \alpha = \frac{\text{přilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{tangens: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}} = \frac{a}{b}$$

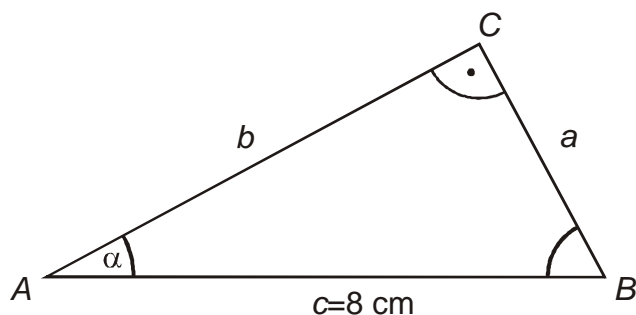
$$\text{kotangens: } \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\text{přilehlá}}{\text{protilehlá}} = \frac{b}{a}$$

Pomocí goniometrických funkcí a Pythagorovy věty $c^2 = a^2 + b^2$ dokážeme dopočítat délky stran a velikosti úhlů v každém pravoúhlém trojúhelníku, ve kterém známe alespoň dva údaje (mezi kterými je alespoň jedna délka).

Dohody při dopočítávání trojúhelníků:

- Všechny hodnoty délek budeme uvádět s přesností na dvě desetinná čísla.
- Všechny hodnoty úhlů budeme uvádět s přesností na minuty.
- Protože vypočtené hodnoty jsou většinou zaokrouhlené (a tedy nepřesné), řešíme příklady tak, abychom všechny údaje určily ze zadaných hodnot. Druhou výhodou tohoto postupu je skutečnost, že chyba při výpočtu první hodnoty tak neznamená automaticky chybu při výpočtu ostatních.

Př. 1: Pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem γ a s úhlem $\alpha = 35^\circ$ má velikost přepony $c = 8 \text{ cm}$. Urči jeho ostatní strany a úhly.

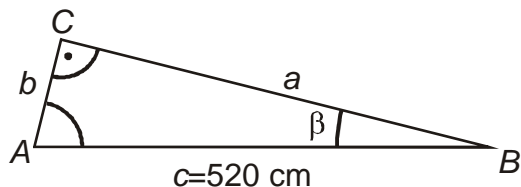


Pro β platí $\beta = 180^\circ - \gamma - \alpha = 180^\circ - 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.

Pro stranu a : $\sin \alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = \sin \alpha \cdot c = \sin 35^\circ \cdot 8 = 4,59 \text{ cm}$.

Pro stranu b : $\cos \alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = \cos \alpha \cdot c = \cos 35^\circ \cdot 8 = 6,55 \text{ cm}$.

Př. 2: Pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem γ a s úhlem $\beta = 15^\circ$ má velikost přepony $c = 520 \text{ cm}$. Urči jeho ostatní strany a úhly.

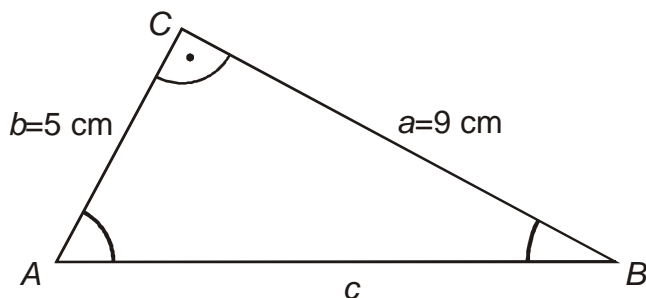


Pro α platí $\alpha = 180^\circ - \gamma - \beta = 180^\circ - 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$.

Pro stranu a : $\cos \beta = \frac{a}{c} \Rightarrow a = \cos \beta \cdot c = \cos 15^\circ \cdot 520 = 502,28 \text{ cm}$

Pro stranu b : $\sin \beta = \frac{b}{c} \Rightarrow b = \sin \beta \cdot c = \sin 15^\circ \cdot 520 = 134,59 \text{ cm}$.

Př. 3: Pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem γ a má odvěsny o velikostech $a = 9 \text{ cm}$ a $b = 5 \text{ cm}$. Urči jeho zbývající strany a úhly.

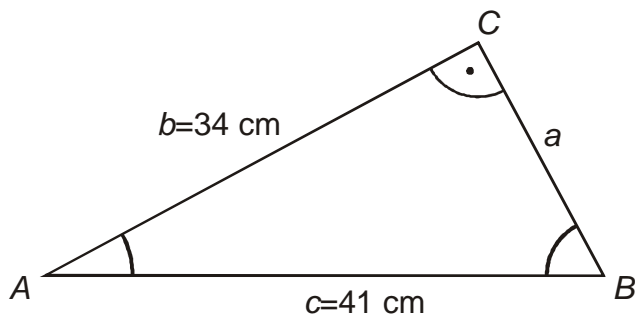


Pro stranu c : $c^2 = a^2 + b^2 = 9^2 + 5^2 = 81 + 25 = 106 \Rightarrow c = \sqrt{106} \text{ cm} = 10,30 \text{ cm}$.

Pro úhel α : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{9}{5} \Rightarrow \alpha = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{9}{5}\right) = 60^\circ 57'$.

Pro úhel β : $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} = \frac{5}{9} \Rightarrow \beta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{5}{9}\right) = 29^\circ 3'$.

Př. 4: Přepona c pravoúhlého trojúhelníku ABC má délku 41 cm . Urči zbývající strany a úhly trojúhelníku, jestliže odvěsna b má délku 35 cm .

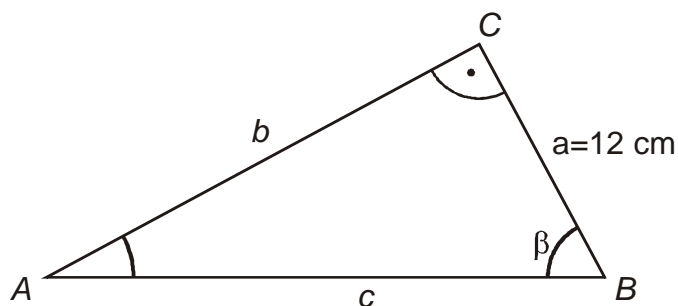


Pro stranu a : $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = c^2 - b^2 = 41^2 - 34^2 = 525 \Rightarrow$
 $a = \sqrt{525} \text{ cm} = \sqrt{25 \cdot 21} \text{ cm} = 5\sqrt{21} \text{ cm} = 22,91 \text{ cm}.$

Pro úhel α : $\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{34}{41} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{34}{41}\right) = 33^\circ 59'.$

Pro úhel β : $\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{34}{41} \Rightarrow \beta = \sin^{-1}\left(\frac{34}{41}\right) = 56^\circ 1'.$

Př. 5: Pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem γ a s úhlem $\beta = 54^\circ 23'$ má velikost odvěsny $a = 12 \text{ cm}$. Urči jeho ostatní strany a úhly.

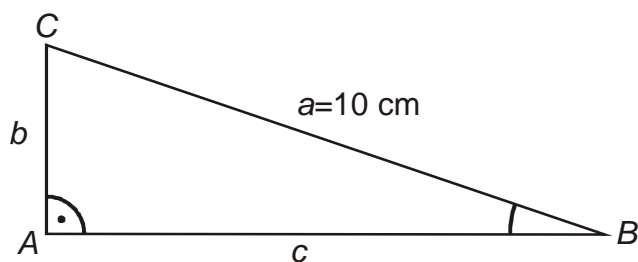


Pro α platí $\alpha = 180^\circ - \gamma - \beta = 180^\circ - 90^\circ - 54^\circ 23' = 35^\circ 37'.$

Pro stranu b : $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} \Rightarrow b = \operatorname{tg} \beta \cdot a = \sin 54^\circ 23' \cdot 12 = 16,75 \text{ cm}.$

Pro stranu c : $\cos \beta = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\cos \beta} = \frac{12}{\cos 54^\circ 23'} = 20,61 \text{ cm}.$

Př. 6: Přepona v pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem α a s úhlem $\beta = 21^\circ$ má velikost $7,4 \text{ cm}$. Urči jeho ostatní strany a úhly.



Pravý úhel $\alpha \Rightarrow$ přepona $a = 7,4 \text{ cm} \Rightarrow$ vyjádření poměrů ve stranách bude jiné než v předchozích příkladech.

Pro γ platí $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 90^\circ - 21^\circ = 69^\circ.$

Pro stranu b : $\sin \beta = \frac{b}{a} \Rightarrow b = \sin \beta \cdot a = \sin 21^\circ \cdot 7,4 = 2,65 \text{ cm}$

Pro stranu c : $\cos \beta = \frac{c}{a} \Rightarrow c = \cos \beta \cdot a = \cos 21^\circ \cdot 7,4 = 6,91 \text{ cm}.$

Shrnutí: