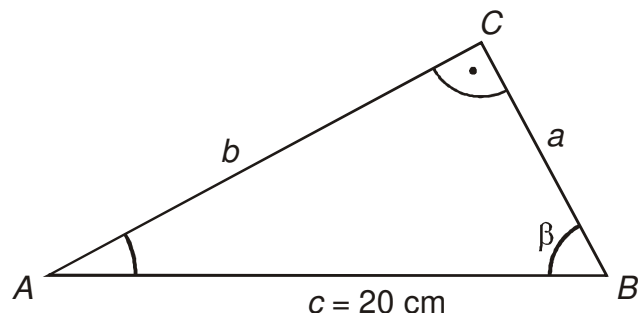


4.3.14 Úlohy o pravoúhlém trojúhelníku II

Předpoklady: 040313

Př. 1: Pravoúhlý trojúhelník ABC má pravý úhel při vrcholu C a přeponu délky 20 cm. Urči jeho zbývající strany a úhly v trojúhelníku, jestliže úhel β má velikost 77° .

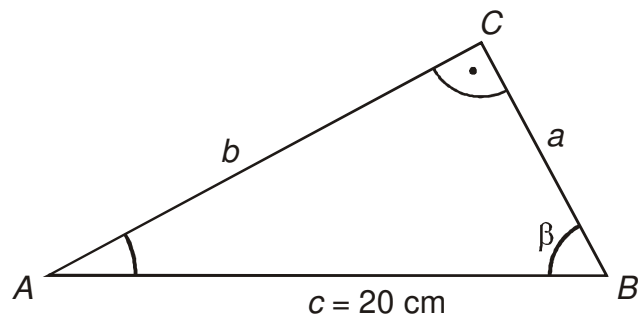


Úhel α : $\alpha = 180^\circ - \gamma - \beta = 180^\circ - 90^\circ - 77^\circ = 13^\circ$.

Strana b : $\sin \beta = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \sin \beta = 20 \cdot \sin 77^\circ \text{ cm} = 19,49 \text{ cm}$.

Strana a : $\cos \beta = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot \cos \beta = 20 \cdot \cos 77^\circ \text{ cm} = 4,50 \text{ cm}$.

Př. 2: Prohlédni si obrázek trojúhelníku v předchozím příkladu. Jaké hodnoty u hledaných stran a úhlů můžeme očekávat?

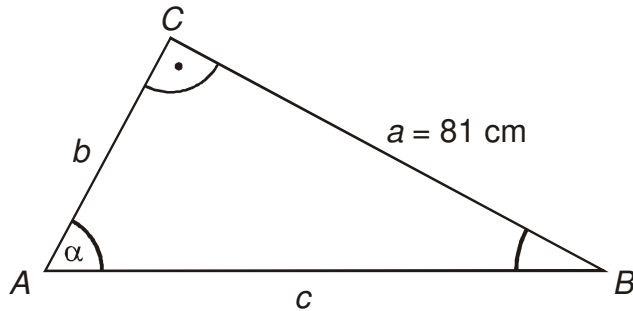


Úhel β je větší než $45^\circ \Rightarrow$ je větší z obou nepravých úhlů \Rightarrow

- úhel $\alpha < 45^\circ$,
- $a < b < c$.

Pedagogická poznámka: Netrvám na tom, aby si žáci v dalších příkladech odhady psali, ale snažím se upozornit všechny, kteří udělají chybu, že jí mohli většinou předejít právě kontrolním odhadem.

Př. 3: Pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem γ a s úhlem $\alpha = 61^\circ 17'$ má velikost odvěsny $a = 81$ cm. Urči jeho ostatní strany a úhly.

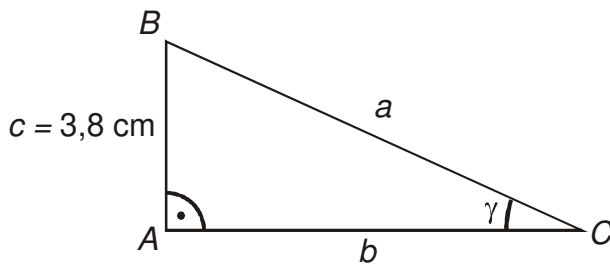


Úhel β : $\beta = 180^\circ - \gamma - \alpha = 180^\circ - 90^\circ - 61^\circ 17' = 28^\circ 43'$.

Strana b : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow b \cdot \operatorname{tg} \alpha = a \Rightarrow b = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{81}{\operatorname{tg} 61^\circ 17'} \text{ cm} = 44,38 \text{ cm}$.

Strana c : $\sin \alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{81}{\sin 61^\circ 17'} \text{ cm} = 92,36 \text{ cm}$.

Př. 4: Pro pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem α platí: $\gamma = 38^\circ$, $c = 3,8$ cm. Urči zbývající strany a úhly.

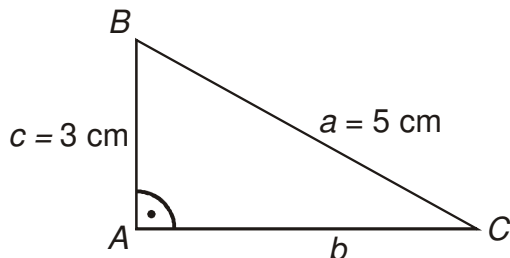


Úhel β : $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 90^\circ - 38^\circ = 52^\circ$.

Strana c : $\sin \gamma = \frac{c}{a} \Rightarrow a \cdot \sin \gamma = c \Rightarrow a = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{3,8}{\sin 38^\circ} \text{ cm} = 6,17 \text{ cm}$.

Strana b : $\operatorname{tg} \gamma = \frac{c}{b} \Rightarrow b \cdot \operatorname{tg} \gamma = c \Rightarrow b = \frac{c}{\operatorname{tg} \gamma} = \frac{3,8}{\operatorname{tg} 38^\circ} \text{ cm} = 4,86 \text{ cm}$.

Př. 5: Pro pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem α platí: $a = 5$ cm, $c = 3$ cm. Urči zbývající strany a úhly.

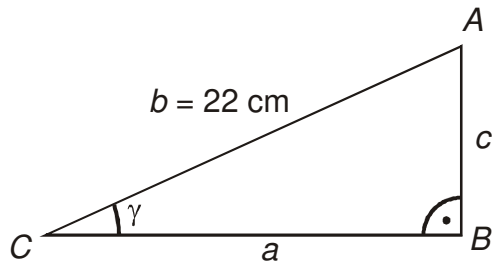


Strana b : $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow b = 4 \text{ cm}$

Úhel β : $\cos \beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \beta = \cos^{-1} \left(\frac{c}{a} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{3}{5} \right) = 53^\circ 8'$

$$\text{Úhel } \gamma: \sin \gamma = \frac{c}{a} \Rightarrow \gamma = \sin^{-1}\left(\frac{c}{a}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = 36^{\circ}52'$$

Př. 6: Pro pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem β platí: $b = 22 \text{ cm}$, $\gamma = 27^{\circ}42'$.
Urči zbývající strany a úhly.

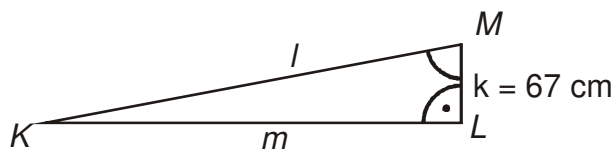


$$\text{Úhel } \alpha: \alpha = 180^{\circ} - \beta - \gamma = 180^{\circ} - 90^{\circ} - 27^{\circ}42' = 62^{\circ}18'.$$

$$\text{Strana } c: \sin \gamma = \frac{c}{b} \Rightarrow c = b \cdot \sin \gamma = 22 \cdot \sin 27^{\circ}42' \text{ cm} = 10,23 \text{ cm}.$$

$$\text{Strana } a: \cos \gamma = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b \cdot \cos \gamma = 22 \cdot \cos 27^{\circ}42' \text{ cm} = 19,48 \text{ cm}.$$

Př. 7: Pro pravoúhlý trojúhelník KLM platí: $|\sphericalangle KLM| = 90^{\circ}$, $|\sphericalangle LMK| = 81^{\circ}19'$, $k = 67 \text{ cm}$.
Urči zbývající strany a úhly.



$$\text{Úhel } \sphericalangle MKL: \sphericalangle MKL = 180^{\circ} - \sphericalangle KLM - \sphericalangle LMK = 180^{\circ} - 90^{\circ} - 81^{\circ}19' = 8^{\circ}41'.$$

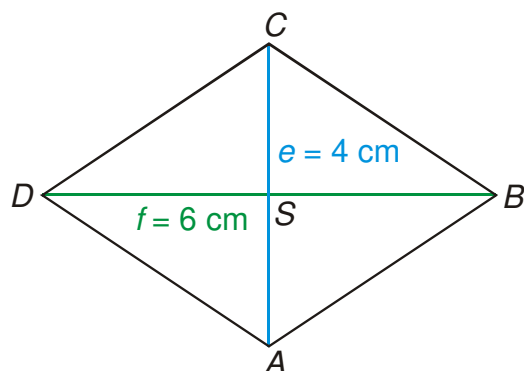
$$\text{Strana } m: \text{tg}(\sphericalangle LMK) = \frac{m}{k} \Rightarrow m = k \cdot \text{tg}(\sphericalangle LMK) = 67 \cdot \text{tg}(81^{\circ}19') \text{ cm} = 438,70 \text{ cm}.$$

$$\cos(\sphericalangle LMK) = \frac{k}{l} \Rightarrow l \cdot \cos(\sphericalangle LMK) = k \Rightarrow l = \frac{k}{\cos(\sphericalangle LMK)} =$$

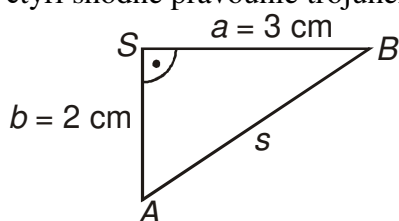
Strana l :

$$= \frac{67}{\cos(81^{\circ}19')} \text{ cm} = 443,79 \text{ cm}$$

Př. 8: V kosočtverci $ABCD$ platí: $e = 6 \text{ cm}$, $f = 4 \text{ cm}$. Urči stranu kosočtverce a velikosti jeho vnitřních úhlů.



Úhlopříčky v kosočtverci jsou na sebe kolmé a navzájem se půlí \Rightarrow rozdělí trojúhelník na čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky (například trojúhelník ABS).



Strana s : $s^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 2^2 = 13 \Rightarrow s = \sqrt{13} \doteq 3,61$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow \alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{a}{b} \right) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{3}{2} \right) = 56^\circ 19'$$

$$\beta = 90^\circ - 56^\circ 19' = 33^\circ 41'$$

Vnitřní úhly kosočtverce jsou složeny vždy ze dvou stejných úhlů v trojúhelníku \Rightarrow mají dvoj násobnou velikost.

Strana kosočtverce má délku $\sqrt{13} \text{ cm}$, jeho vnitřní úhly mají velikost $112^\circ 38'$ a $67^\circ 22'$.

Shrnutí: Při řešení úloh o pravoúhlém trojúhelníku je důležitý správně nakreslený trojúhelník.