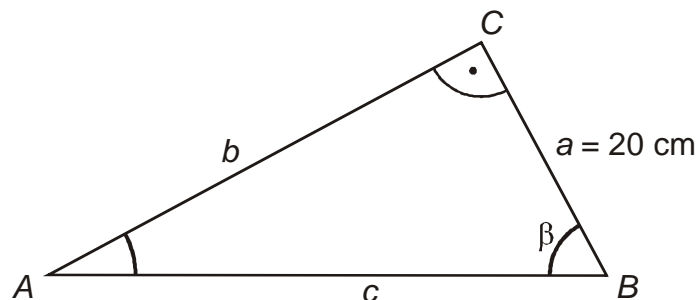


4.3.15 Tabulkové hodnoty goniometrických funkcí

Předpoklady: 040314

Př. 1: Pravoúhlý trojúhelník ABC má pravý úhel při vrcholu C a odvěsnu a o délce 20 cm. Urči jeho zbývající strany a úhly v trojúhelníku, jestliže úhel β má velikost 71° .

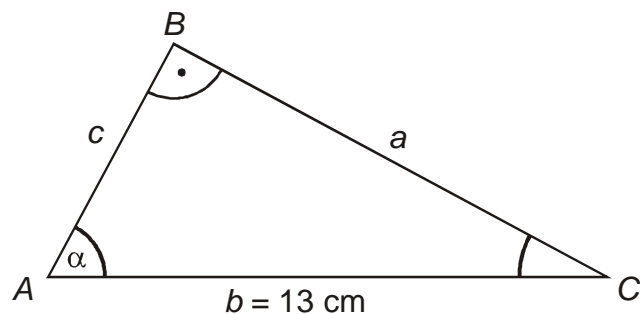


Pro úhel α : $\alpha = 180^\circ - \gamma - \beta = 180^\circ - 90^\circ - 71^\circ = 19^\circ$.

Pro stranu b : $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \cdot \operatorname{tg} \beta = 20 \cdot \operatorname{tg} 71^\circ \text{ cm} = 58,08 \text{ cm}$.

Pro stranu c : $\cos \beta = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot \cos \beta \Rightarrow c = \frac{a}{\cos \beta} = \frac{20}{\cos 71^\circ} \text{ cm} = 61,43 \text{ cm}$.

Př. 2: Urči ostatní strany a úhly pravoúhlého trojúhelníku ABC s pravým úhlem β , s úhlem $\alpha = 58^\circ 38'$ a s přeponou o délce 13 cm.



Pro úhel γ : $\gamma = 180^\circ - \beta - \alpha = 180^\circ - 90^\circ - 58^\circ 38' = 31^\circ 22'$.

Pro stranu a : $\sin \alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b \cdot \sin \alpha = 13 \cdot \sin 58^\circ 38' \text{ cm} = 11,10 \text{ cm}$.

Pro stranu c : $\cos \alpha = \frac{c}{b} \Rightarrow c = b \cdot \cos \alpha = 13 \cdot \cos 58^\circ 38' \text{ cm} = 6,77 \text{ cm}$.

Dobrá zpráva: Pomocí přibližných hodnot goniometrických funkcí dokážeme dopočítat strany a úhly v pravoúhlých trojúhelnících.

Malý matematicko-estetický problém: Hodnoty z papírků i hodnoty z kalkulaček jsou pouze přibližné (a matematici mají rádi zcela přesné výsledky).

Př. 3: V jaké situaci bychom mohli určit přesně hodnoty goniometrických funkcí pro nějaký úhel?

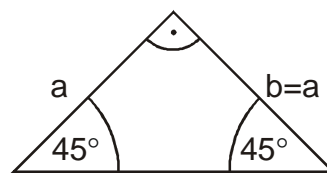
Pokud bychom našli pravoúhlý trojúhelník, u kterého bychom znali:

- přesné hodnoty vnitřních úhlů,
- přesné délky stran.

Takové trojúhelníky známe dokonce dva. Jedním z nich je **rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník**.

Př. 4: Načrtni obrázek rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku o délce odvěsny a . Urči velikosti přepony a vnitřních úhlů. Tyto výsledky použij na určení přesných hodnot goniometrických funkcí pro určené úhly.

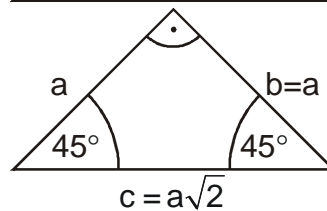
Ramena jsou stejné dlouhá.



Délka přepony pomocí Pythagorovy věty:

$$c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$c = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$



Z trojúhelníku můžeme určit hodnoty goniometrických funkcí pro úhel $\alpha = 45^\circ$,

$$\sin 45^\circ = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

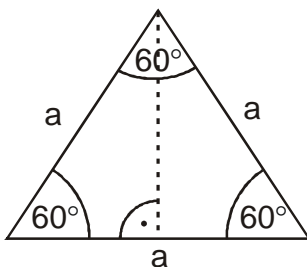
$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\text{přilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

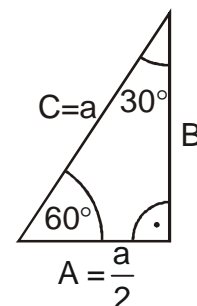
$$\operatorname{cotg} 45^\circ = \frac{\text{přilehlá}}{\text{protilehlá}} = \frac{a}{a} = 1$$

Př. 5: Načrtni obrázek rovnostranného trojúhelníku o délce strany a . Rozděl trojúhelník jednou z výšek na dvě stejné poloviny. Jaké trojúhelníky jsi získal? Urči velikosti stran a vnitřních úhlů získaného trojúhelníku. Výsledky použij na určení přesných hodnot goniometrických funkcí pro určené úhly.

Výška na libovolnou stranu rozdělí trojúhelník na dva pravoúhlé trojúhelníky s úhly 30° a 60° .



\Rightarrow

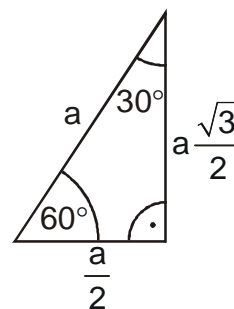


Délka delší odvěsny pomocí Pythagorovy věty:

$$C^2 = A^2 + B^2 \Rightarrow B^2 = C^2 - A^2$$

$$B^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$$

$$B = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = a\sqrt{\frac{3}{4}} = a\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Z obrázku můžeme určit hodnoty goniometrických funkcí pro úhly 60° a 30° .

Hodnoty goniometrických funkcí pro $\alpha = 60^\circ$.

$$\sin 60^\circ = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{přilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\text{cotg } 60^\circ = \frac{\text{přilehlá}}{\text{protilehlá}} = \frac{\frac{a}{2}}{a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Hodnoty goniometrických funkcí pro $\alpha = 30^\circ$.

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{přilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}} = \frac{\frac{a}{2}}{a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{cotg } 30^\circ = \frac{\text{přilehlá}}{\text{protilehlá}} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

Př. 6: Využij hodnoty z předchozích příkladů k doplnění tabulky. Řídí se hodnoty v tabulce nějakými pravidly? Jak si hodnoty v tabulce co nejlépe zapamatovat?

Hodnoty goniometrických funkcí pro základní úhly:

| Úhel [°] | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 |
|------------------|---|----|----|----|----|
| $\sin(x)$ | | | | | |
| $\cos(x)$ | | | | | |
| $\text{tg}(x)$ | | | | | |
| $\text{cotg}(x)$ | | | | | |

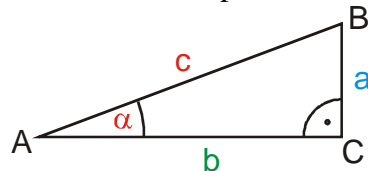
Prepíšeme do tabulky hodnoty z předchozích příkladů. Hodnoty funkcí pro 0° a 90° jsme si určili už dříve.

Hodnoty goniometrických funkcí pro základní úhly:

| Úhel [°] | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 |
|-----------|---|---------------|----------------------|----------------------|----|
| $\sin(x)$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |

| | | | | | |
|------------------|----------|----------------------|----------------------|----------------------|----------|
| $\cos(x)$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\text{tg}(x)$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | |
| $\text{cotg}(x)$ | | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |

Jak si tabulku zapamatovat?



$\sin x = \frac{a}{c} \Rightarrow$ s **rostoucím úhlem** α se hodnota $\sin x$ **zvětšuje**

$\cos x = \frac{b}{c} \Rightarrow$ s **rostoucím úhlem** α se hodnota $\cos x$

zmenšuje

| Úhel [°] | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 |
|------------------|--------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|--------------------------|
| $\sin(x)$ | $0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$ | $\frac{\sqrt{1}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$ |
| $\cos(x)$ | $1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{1}}{2}$ | $0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$ |
| $\text{tg}(x)$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | |
| $\text{cotg}(x)$ | | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |

Všechny hodnoty funkcí $\sin x$ a $\cos x$ můžeme zapsat ve stejném tvaru $\frac{\sqrt{\text{číslo}}}{2}$.

- Pro $\sin x$ dosazujeme postupně 0 až 4 (hodnoty rostou).
- Pro $\cos x$ dosazujeme postupně 4 až 0 (hodnoty klesají).

Podobně můžeme (až na krajní hodnoty), rozepsat i hodnoty funkce tangens a kotangens.

| Úhel [°] | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 |
|------------------|--------------------------|-------------------------------------|------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| $\sin(x)$ | $0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$ | $\frac{\sqrt{1}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$ |
| $\cos(x)$ | $1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{1}}{2}$ | $0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$ |
| $\text{tg}(x)$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{(\sqrt{3})^2}{3} = 1$ | $\frac{(\sqrt{3})^3}{3} = \sqrt{3}$ | |
| $\text{cotg}(x)$ | | $\frac{(\sqrt{3})^3}{3} = \sqrt{3}$ | $\frac{(\sqrt{3})^2}{3} = 1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |

Dodatek: Pomocí vzorců, které se probírají později je možné určit přesné hodnoty goniometrických funkcí i pro další úhly.

Př. 7: Pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem γ a s úhlem $\alpha = 30^\circ$ má velikost přepony $c = 10\text{ cm}$. Urči jeho ostatní strany a úhly.

Pro β platí: $\beta = 180^\circ - \gamma - \alpha = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Pro stranu a : $\sin \alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = \sin \alpha \cdot c = \sin 30^\circ \cdot 10 = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5\text{ cm}$.

Pro stranu b : $\cos \alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = \cos \alpha \cdot c = \cos 30^\circ \cdot 10 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10 = 5\sqrt{3} \doteq 8,66\text{ cm}$.

Shrnutí: Pro úhly 30° , 45° a 60° dokážeme vyjádřit hodnoty goniometrických funkcí zcela přesně.