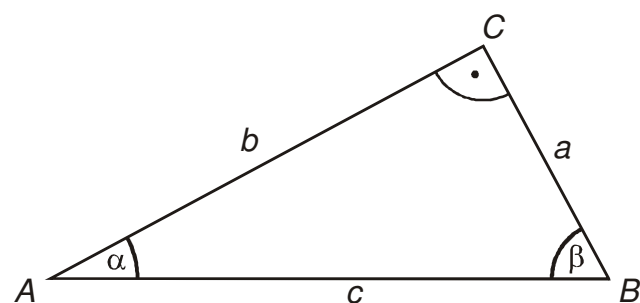


4.3.16 Vztahy mezi goniometrickými funkcemi

Předpoklady: 040315

Př. 1: Nakresli pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem γ . Vysvětli pomocí obrázku, proč platí $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$. Najdi další podobné vztahy.



Pro úhel β platí: $\beta = 90^\circ - \alpha \Rightarrow$ místo β můžeme psát $90^\circ - \alpha$.

Platí: $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\cos \beta = \frac{a}{c} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{a}{c} = \cos \beta = \cos(90^\circ - \alpha)$. Dokázáno.

Ke vzorci $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ můžeme přidat tři další podobné:

- $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ (poměr $\frac{b}{c}$)
- $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg}(90^\circ - \alpha)$ (poměr $\frac{a}{b}$)
- $\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$ (poměr $\frac{b}{a}$)

Př. 2: Bez kalkulačky rozhodni, které z následujících rovností platí.

- a) $\sin 32^\circ = \cos 32^\circ$ b) $\cos 71^\circ = \sin 19^\circ$ c) $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$
d) $\operatorname{tg} 57^\circ = \operatorname{cotg} 33^\circ$ e) $\sin 23^\circ 34' = \cos 66^\circ 34'$ f) $\operatorname{tg} 49^\circ 23' = \operatorname{cotg} 40^\circ 37'$

- a) $\sin 32^\circ = \cos 32^\circ$: neplatí (dva různé poměry, v pravoúhlém trojúhelníku, který není rovnoramenný, nemají dvě odvěsny stejnou velikost).
b) $\cos 71^\circ = \sin 19^\circ$: platí ($19^\circ = 90^\circ - 71^\circ$)
c) $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$: platí (dva různé poměry, ale v trojúhelníku se shodnými odvěsnami navíc platí $45^\circ = 90^\circ - 45^\circ$).
d) $\operatorname{tg} 57^\circ = \operatorname{cotg} 33^\circ$: platí ($33^\circ = 90^\circ - 57^\circ$)
e) $\sin 23^\circ 34' = \cos 66^\circ 34'$: neplatí ($23^\circ 34' \neq 90^\circ - 66^\circ 34'$)
f) $\operatorname{tg} 49^\circ 23' = \operatorname{cotg} 40^\circ 37'$: platí ($49^\circ 23' \neq 90^\circ - 40^\circ 37'$)

Př. 3: Uspořádej čísla od nejmenšího k největšímu bez kalkulačky i tabulek.

- a) $\sin 23^\circ$, $\sin 68^\circ$, $\sin 40^\circ$
b) $\cos 15^\circ$, $\sin 77^\circ$, $\cos 53^\circ$, $\sin 28^\circ$, $\cos 84^\circ$

- a) $\sin 23^\circ$, $\sin 68^\circ$, $\sin 40^\circ$

Jde o hodnoty funkce sinus, která je rostoucí (z větších úhlů vytváří větší hodnoty poměru) $\Rightarrow \sin 23^\circ < \sin 40^\circ < \sin 68^\circ$.

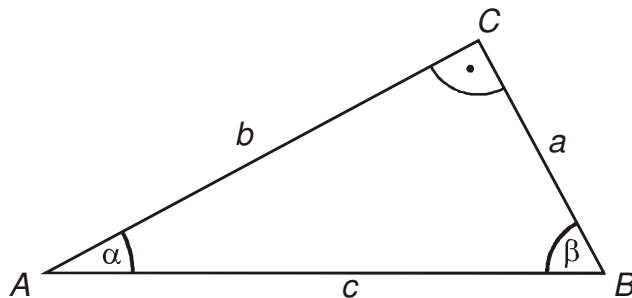
b) $\cos 15^\circ$, $\sin 77^\circ$, $\cos 53^\circ$, $\sin 28^\circ$, $\cos 84^\circ$

Porovnávání by bylo snadné, kdybychom měli pouze hodnoty jedné funkce \Rightarrow použijeme vztah $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ a převedeme všechny siny na kosiny:

- $\sin 77^\circ = \cos 12^\circ$,
- $\sin 28^\circ = \cos 62^\circ$.

Funkce kosinus je klesající (z větších hodnot úhlu vytváří menší hodnoty poměru) $\Rightarrow \cos 12^\circ > \cos 15^\circ > \cos 53^\circ > \cos 62^\circ > \cos 84^\circ$
 $\sin 77^\circ > \cos 15^\circ > \cos 53^\circ > \sin 28^\circ > \cos 84^\circ$

Př. 4: Najdi v obrázku vztah mezi $\operatorname{tg} \alpha$ a $\operatorname{cotg} \alpha$.



$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow$ podobné definice, pouze prohození čitatele a jmenovatele $\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1$

Důkaz: $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$

Př. 5: Při zavádění funkce tangens jsme si všimli vztahu $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. Najdi podobný vztah pro $\operatorname{cotg} \alpha$.

$\operatorname{cotg} \alpha$ je převrácenou hodnotou $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Př. 6: Odvoď z Pythagorovy věty vztah mezi $\sin \alpha$ a $\cos \alpha$.

Pythagorova věta: $c^2 = a^2 + b^2 \quad | : c^2$

(potřebujeme vytvořit hodnoty $\sin \alpha$ a $\cos \alpha$, obě mají ve jmenovateli c)

$$1 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$$

Shrnutí: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Pro goniometrické funkce $\sin \alpha$ a $\cos \alpha$ platí vztah $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Dodatek: Předchozí vzorec bývá často označován jako goniometrická jednička.

Množství vztahů mezi goniometrickými funkcemi umožňuje určit z hodnoty jedné funkce i hodnoty funkcí ostatních.

Př. 7: Bez toho, abys určil hodnotu úhlu α , urči hodnoty ostatních goniometrických funkcí pro tento úhel, jestliže platí $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Nejdříve vypočteme hodnotu funkce $\cos \alpha$:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad / - \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{25-16}{25} = \frac{9}{25}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

Teď můžeme snadno určit i hodnoty zbývajících funkcí.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

Pokud platí $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, platí i $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{3}{4}$.

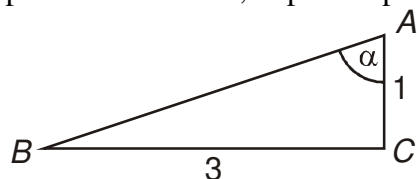
Př. 8: Bez toho, abys určil hodnotu úhlu α , urči hodnoty ostatních goniometrických funkcí pro tento úhel, jestliže platí $\operatorname{tg} \alpha = 3$.

Nejjednodušší je určení funkce $\operatorname{cotg} \alpha$: $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1 \quad / : \operatorname{tg} \alpha$

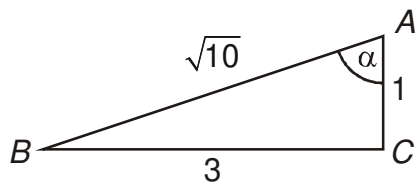
$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{3}$$

Problém: V žádném vzorci nevystupuje samotná funkce $\sin \alpha$ ($\cos \alpha$) a jedna z funkcí $\operatorname{tg} \alpha$ (nebo $\operatorname{cotg} \alpha$).

Řešení: $\operatorname{tg} \alpha = 3 \Rightarrow$ známe poměr odvěsen, můžeme si zvolit pravoúhlý trojúhelník s tímto poměrem odvěsen, dopočítat přeponu a z ní určit hodnoty $\sin \alpha$ a $\cos \alpha$.



Délka přepony: $c^2 = a^2 + b^2 = 1^2 + 3^2 = 10 \Rightarrow c = \sqrt{10}$



Z obrázku vidíme:

- $\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,
- $\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Pokud platí $\operatorname{tg} \alpha = 3$, platí i $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{3}$, $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ a $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Shrnutí: Mezi goniometrickými funkcemi je mnoho vztahů vycházejících z poměrů stran nebo Pythagorovy věty.