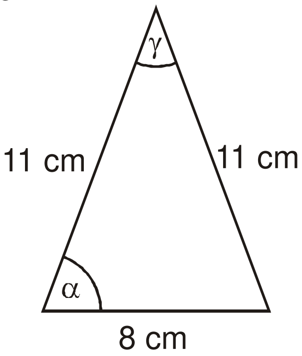
## 4.3.17 Další úlohy o pravoúhlých trojúhelnících I

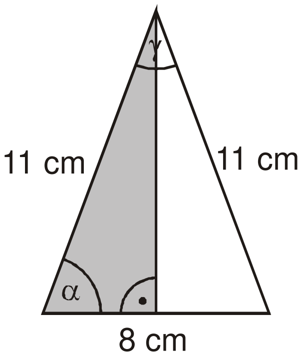
**Předpoklady:** 040316

**Př. 1:** Urči vnitřní úhly rovnoramenného trojúhelníku se základnou o délce 8 cm a rameny o délkách 11 cm.

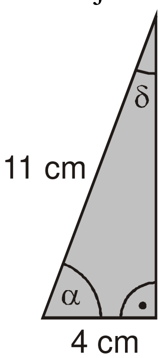
Rovnoramenný trojúhelník nemusí mít pravý úhel $\Rightarrow$ automaticky nemůžeme použít goniometrické funkce $\Rightarrow$ nakreslíme obrázek a zkusíme nějaký pravoúhlý trojúhelník najít.




Do trojúhelníku můžeme dokreslit výšku na základnu, tato výška rozdělí rovnoramenný trojúhelník na dvě stejné poloviny.




Získali jsme tak šedě vybarvený pravoúhlý trojúhelník.




- $\cos\alpha = \frac{4}{11} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{4}{11}\right) = 68°41'$
- $\sin\delta = \frac{4}{11} \Rightarrow \delta = \sin^{-1}\left(\frac{4}{11}\right) = 21°19'$

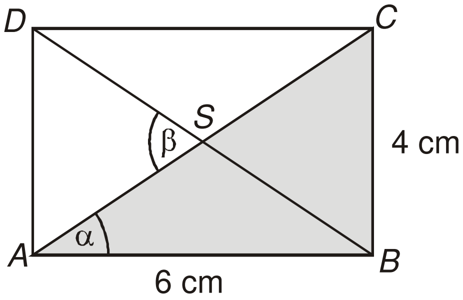
Úhel $\gamma$ v původním rovnoramenném trojúhelníku $\gamma = 2\cdot\delta = 2\cdot 21°19' = 42°38'$.

V rovnoramenném trojúhelníku se základnou o délce 8 cm a rameny o délkách 11 cm mají úhly při základně velikost $68°41'$, ramena pak svírají úhel $42°38'$.

**Př. 2:** Délky stran obdélníku jsou v poměru 6:4. Urči úhel, který:
a) svírá úhlopříčka s delší stranou, b) svírají úhlopříčky navzájem.

Délky stran v poměru 6:4 $\Rightarrow$ konkrétní velikosti si můžeme zvolit (při zachování poměru), nejjednodušší délky 6 a 4.

Nakreslíme obrázek.




Z pravoúhlého trojúhelníku *ABC* můžeme určit velikost úhlu $\alpha$:

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{4}{6} \Rightarrow \alpha = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{4}{6}\right) = 33°41'$.

Platí: $|\sphericalangle DAS| = 90° - \alpha = 90° - 33°41' = 56°19'$.

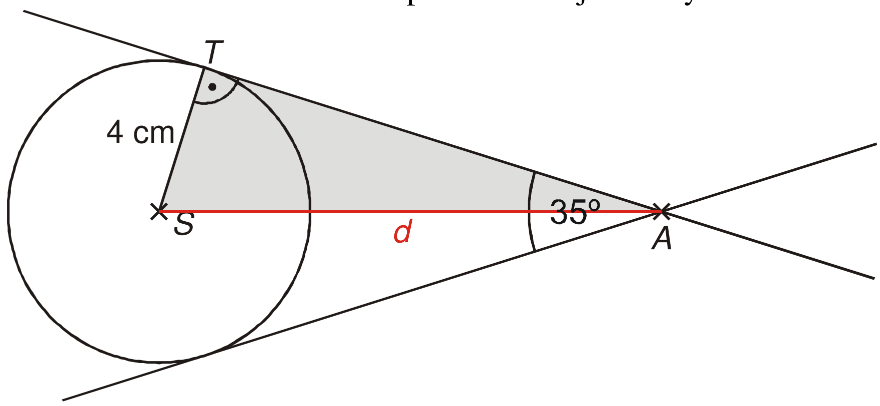
Platí: $|\sphericalangle DAS| = |\sphericalangle ADS|$ (rovnoramenný trojúhelník *ADS*).

$\beta = 180° - 2 \cdot |\sphericalangle DAS| = 180° - 2 \cdot 56°19' = 67°22'$.

V obdélníku s poměrem stran 6:4 svírá úhlopříčka s delší stranou úhel $33°41'$, úhlopříčky navzájem pak svírají úhel $67°22'$.

**Př. 3:** V jaké vzdálenosti od středu kružnice o poloměru 4 cm musí být bod *A*, pokud tečny kružnice, které z něj vychází, mají svírat úhel $35°$?

Nakreslíme obrázek a hledáme pravoúhlé trojúhelníky.



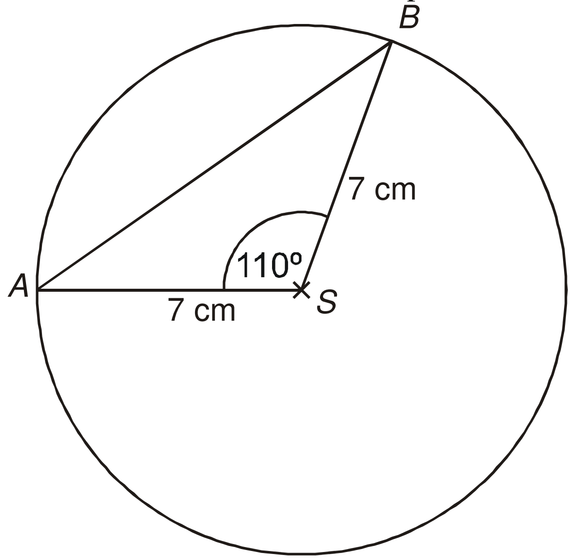

Tečna kružnice je kolmá na její poloměr $\Rightarrow$ získali jsme pravoúhlý trojúhelník *AST*, ve kterém známe stranu a úhel (úhel $SAT$ představuje polovinu úhlu mezi oběma tečnami) $\Rightarrow$ můžeme dopočítat libovolnou další stranu.

$\sin 17{,}5° = \frac{4}{d} \Rightarrow d = \frac{4}{\sin 17{,}5°}\ \mathrm{cm} = 13{,}30\ \mathrm{cm}$

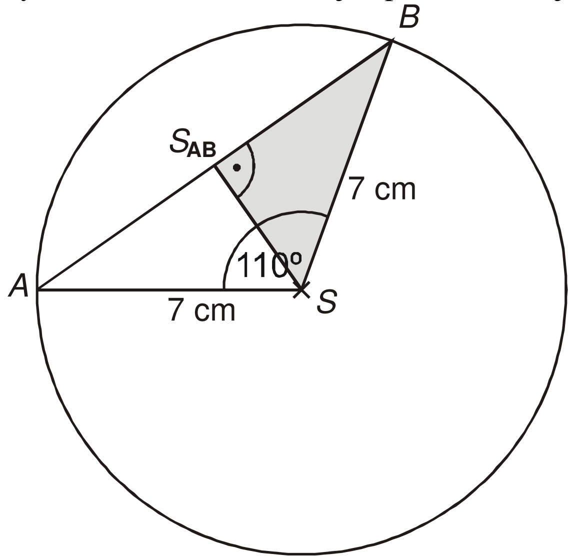
Bod *A* musí ležet ve vzdálenosti 13,30 cm od středu kružnice.

**Př. 4:** V kružnici $k(S; 7\text{ cm})$ máme sestrojit tětivu $AB$ tak, aby jí příslušel středový úhel $110°$. Jaká bude délka tětivy? Urči vzdálenost středu tětivy $S_{AB}$ od středu kružnice.

Nakreslíme obrázek a hledáme pravoúhlé trojúhelníky.




Na první pohled na obrázku žádný není, ale trojúhelník $ABS$ je rovnoramenný $\Rightarrow$ můžeme ho výškou rozdělit na dva stejné pravoúhlé trojúhelníky.



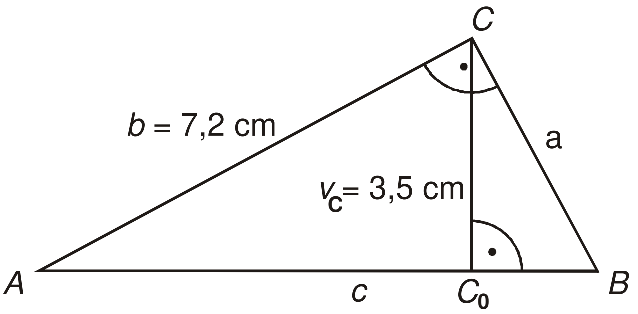

$$\sin 55° = \frac{|S_{AB}B|}{|SB|} \Rightarrow |S_{AB}B| = |SB| \cdot \sin 55° = 7 \cdot \sin 55° \text{ cm} = 5,73 \text{ cm} \Rightarrow$$

$$|AB| = 2|S_{AB}B| = 2 \cdot 5,73 \text{ cm} = 11,46 \text{ cm}$$

$$\cos 55° = \frac{|S_{AB}S|}{|SB|} \Rightarrow |S_{AB}S| = |SB| \cdot \cos 55° = 7 \cdot \cos 55° \text{ cm} = 4,02 \text{ cm}$$

Hledaná tětiva bude mít délku 11,46 cm a její střed bude od středu kružnice vzdálen 4,02 cm.

**Př. 5:** V pravoúhlém trojúhelníku $ABC$ s pravým úhlem $\gamma$ platí: $b = 7,2\text{ cm}$, $v_c = 3,5\text{ cm}$. Urči vnitřní úhly a strany trojúhelníku.




V pravoúhlém trojúhelníku $ABC$ známe pouze jednu stranu a žádný úhel $\Rightarrow$ zbývající hodnoty nedopočteme, dokud nezískáme další údaj.
Výška rozděluje trojúhelník na dva další menší pravoúhlé trojúhelníky, v trojúhelníku $ACC_0$ známe dvě strany $\Rightarrow$ můžeme určit úhel $\alpha$ a z něj pak ostatní hodnoty.

$$\sin\alpha = \frac{v_c}{b} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{v_c}{b}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{3,5}{7,2}\right) = 29°5'$$

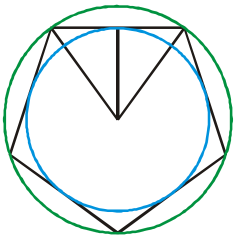
Nyní dopočítáváme hodnoty v trojúhelníku $ABC$:

- $\beta = 180° - 90° - \alpha = 180° - 90° - 29°5' = 60°55'$,
- $\cos\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow c = \frac{b}{\cos\alpha} = \frac{7,2}{\cos 29°5'}\text{ cm} = 8,24\text{ cm}$,
- $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow a = \operatorname{tg}\alpha \cdot b = 7,2\operatorname{tg} 29°5'\text{ cm} = 4,00\text{ cm}$,

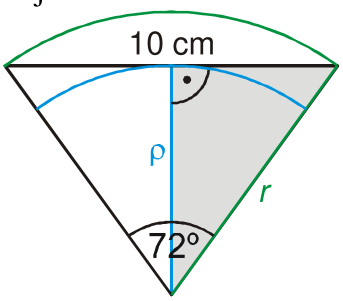
Trojúhelník $ABC$ má strany o délkách $a = 4,00\text{ cm}$, $b = 7,20\text{ cm}$, $c = 8,24\text{ cm}$ a vnitřní úhly $\alpha = 29°5'$, $\beta = 60°55'$.

**Př. 6:** Vypočti poloměry kružnice opsané i vepsané pravidelnému pětiúhelníku o straně 10 cm.

Nakreslíme si obrázek.



Pětiúhelník se skládá z pěti stejných částí, jednu z nich si zvětšíme, jde o rovnoramenný trojúhelník s úhlem mezi rameny $360° : 5 = 72°$.



Podobně jako v předchozích příkladech můžeme rovnoramenný trojúhelník rozdělit výškou na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky. Dvě strany trojúhelníků představují velikosti, které hledáme:

- přepona trojúhelníků poloměr kružnice opsané,
- odvěsna trojúhelníků poloměr kružnice vepsané.

Velikosti dopočítáme:

- $\sin 36° = \frac{5}{r} \Rightarrow r = \frac{5}{\sin 36°} \text{ cm} = 8{,}51 \text{ cm}$,
- $\text{tg}\, 36° = \frac{5}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{5}{\text{tg}\, 36°} \text{ cm} = 6{,}88 \text{ cm}$,

Pravidelný pětiúhelník o délce strany 10 cm má poloměr kružnice opsané 8,51 cm a poloměr kružnice vepsané 6,88 cm.

**Shrnutí:** Rovnoramenný trojúhelník je možné výškou na základnu rozdělit na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky.