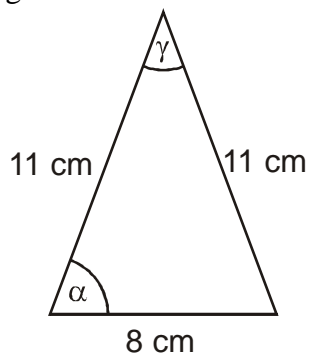


4.3.17 Další úlohy o pravoúhlých trojúhelnících I

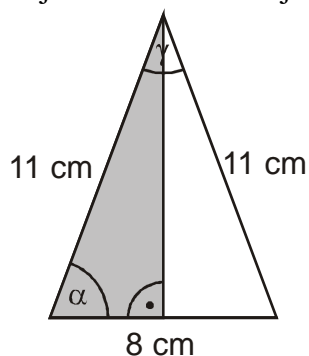
Předpoklady: 040316

Př. 1: Urči vnitřní úhly rovnoramenného trojúhelníku se základnou o délce 8 cm a rameny o délkách 11 cm.

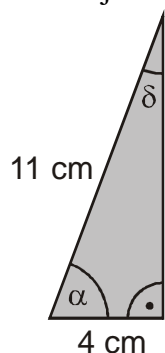
Rovnoramenný trojúhelník nemusí mít pravý úhel \Rightarrow automaticky nemůžeme použít goniometrické funkce \Rightarrow nakreslíme obrázek a zkusíme nějaký pravoúhlý trojúhelník najít.



Do trojúhelníku můžeme dokreslit výšku na základnu, tato výška rozdělí rovnoramenný trojúhelník na dvě stejné poloviny.



Získali jsme tak šedě vybarvený pravoúhlý trojúhelník.



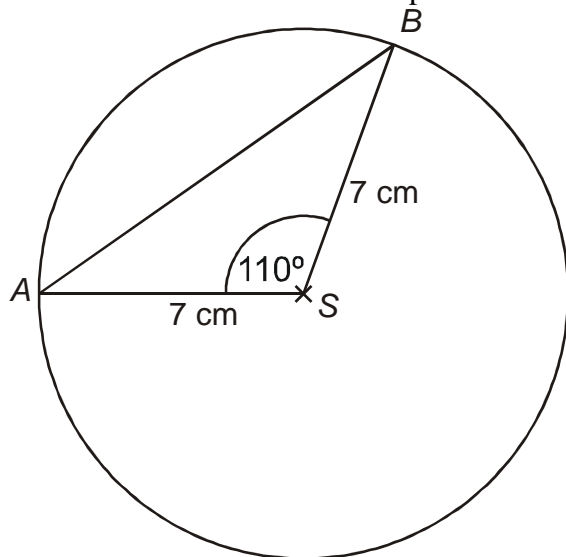
- $\cos \alpha = \frac{4}{11} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{4}{11}\right) = 68^{\circ}41'$
- $\sin \delta = \frac{4}{11} \Rightarrow \delta = \sin^{-1}\left(\frac{4}{11}\right) = 21^{\circ}19'$

Úhel γ v původním rovnoramenném trojúhelníku $\gamma = 2 \cdot \delta = 2 \cdot 21^{\circ}19' = 42^{\circ}38'$.

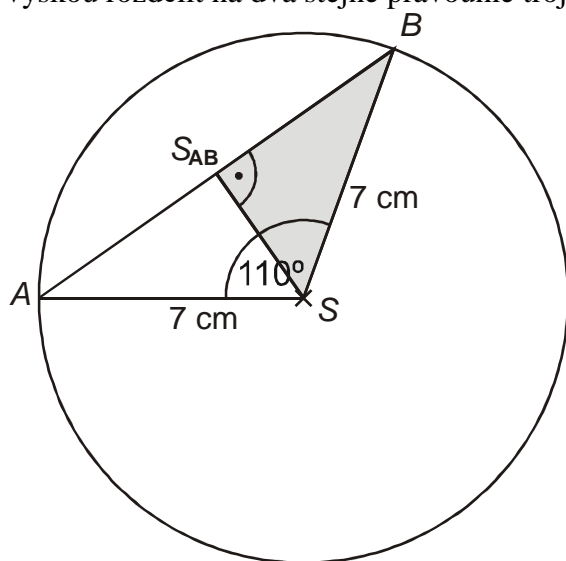
V rovnoramenném trojúhelníku ose základnou o délce 8 cm a rameny o délkách 11 cm mají úhly při základně velikost $68^{\circ}41'$, ramena pak svírají úhel $42^{\circ}38'$.

Př. 4: V kružnici $k(S; 7 \text{ cm})$ máme sestavit tětivu AB tak, aby jí příslušel středový úhel 110° . Jaká bude délka tětivy? Urči vzdálenost středu tětivy S_{AB} od středu kružnice.

Nakreslíme obrázek a hledáme pravoúhlé trojúhelníky.



Na první pohled na obrázku žádný není, ale trojúhelník ABS je rovnoramenný \Rightarrow můžeme ho výškou rozdělit na dva stejné pravoúhlé trojúhelníky.



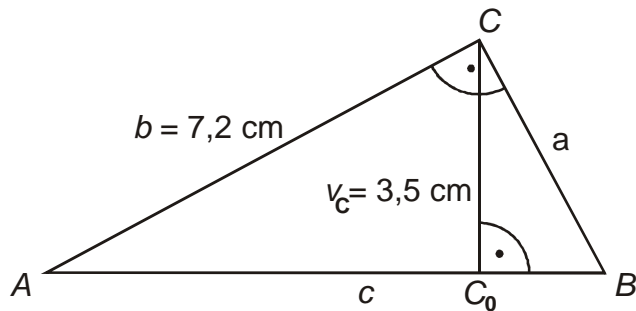
$$\sin 55^\circ = \frac{|S_{AB}B|}{|SB|} \Rightarrow |S_{AB}B| = |SB| \cdot \sin 55^\circ = 7 \cdot \sin 55^\circ \text{ cm} = 5,73 \text{ cm} \Rightarrow$$

$$|AB| = 2|S_{AB}B| = 2 \cdot 5,73 \text{ cm} = 11,46 \text{ cm}$$

$$\cos 55^\circ = \frac{|S_{AB}S|}{|SB|} \Rightarrow |S_{AB}S| = |SB| \cdot \cos 55^\circ = 7 \cdot \cos 55^\circ \text{ cm} = 4,02 \text{ cm}$$

Hledaná tětiva bude mít délku 11,46 cm a její střed bude od středu kružnice vzdálen 4,02 cm.

Př. 5: V pravouhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem γ platí: $b = 7,2 \text{ cm}$, $v_c = 3,5 \text{ cm}$.
Urči vnitřní úhly a strany trojúhelníku.



V pravouhlém trojúhelníku ABC známe pouze jednu stranu a žádný úhel \Rightarrow zbývající hodnoty nedopočteme dokud nezískáme další údaj.

Výška rozděluje trojúhelník na dva další menší pravouhlé trojúhelníky, v trojúhelníku ACC_0 známe dvě strany \Rightarrow můžeme určit úhel α a z něj pak ostatní hodnoty.

$$\sin \alpha = \frac{v_c}{b} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1} \left(\frac{v_c}{b} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{3,5}{7,2} \right) = 29^\circ 5'$$

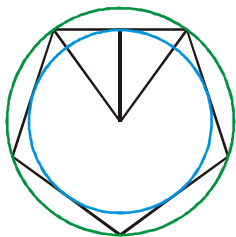
Nyní dopočítáváme hodnoty v trojúhelníku ABC :

- $\beta = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 180^\circ - 90^\circ - 29^\circ 5' = 60^\circ 55'$,
- $\cos \alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow c = \frac{b}{\cos \alpha} = \frac{7,2}{\cos 29^\circ 5'} \text{ cm} = 8,24 \text{ cm}$,
- $\text{tg } \alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow a = \text{tg } \alpha \cdot b = 7,2 \text{ tg } 29^\circ 5' \text{ cm} = 4,00 \text{ cm}$,

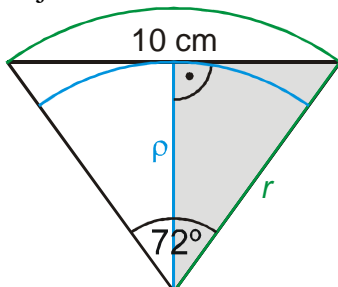
Trojúhelník ABC má strany o délkách $a = 4,00 \text{ cm}$, $b = 7,20 \text{ cm}$, $c = 8,24 \text{ cm}$ a vnitřní úhly $\alpha = 29^\circ 5'$, $\beta = 60^\circ 55'$.

Př. 6: Vypočti poloměry kružnice opsané i vepsané pravidelnému pětiúhelníku o straně 10 cm.

Nakreslíme si obrázek.



Pětiúhelník se skládá z pěti stejných částí, jednu z nich si zvětšíme, jde o rovnoramenný trojúhelník s úhlem mezi rameny $360^\circ : 5 = 72^\circ$.



Podobně jako v předchozích příkladech můžeme rovnoramenný trojúhelník rozdělit výškou na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky. Dvě strany trojúhelníků představují velikosti, které hledáme:

- přepona trojúhelníků, poloměr kružnice opsané,
- odvěsna trojúhelníků poloměr kružnice vepsané.

Velikosti dopočítáme:

- $\sin 36^\circ = \frac{5}{r} \Rightarrow r = \frac{5}{\sin 36^\circ} \text{ cm} = 8,51 \text{ cm} ,$
- $\text{tg } 36^\circ = \frac{5}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{5}{\text{tg } 36^\circ} \text{ cm} = 6,88 \text{ cm} ,$

Pravidelný pětiúhelník o délce strany 10 cm, poloměr kružnice opsané 8,51 cm a poloměr kružnice vepsané 6,88 cm.

Shrnutí: Rovnoramenný trojúhelník je možné výškou na základnu rozdělit na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky.