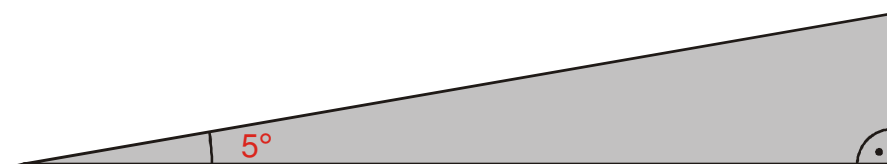


4.3.18 Další úlohy o pravoúhlých trojúhelnících II

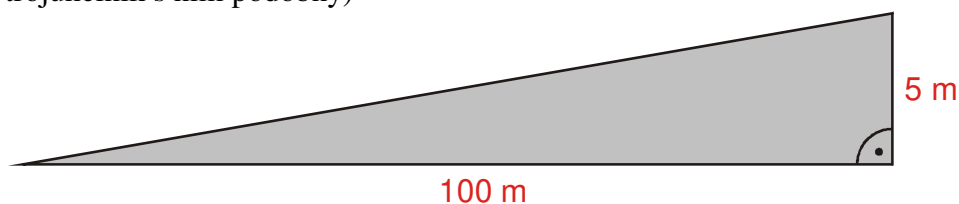
Předpoklady: 040317

Př. 1: Míra stoupání (klesání) svahu se vyjadřuje většinou pomocí procent nebo stupňů. Nakresli obrázky, které vysvětlují, co znamená, že svah má sklon (spád)
a) 5° , b) 5 %. Ve kterém z těchto dvou případů je svah příkřejší?

a) svah o sklonu 5° si můžeme představit jako pravoúhlý trojúhelník s úhlem mezi přeponou a vodorovnou odvěsnou o velikosti 5°



b) svah o sklonu 5 % si můžeme představit jako pravoúhlý trojúhelník s vodorovnou odvěsnou o délce 100 m a svislou odvěsnou o velikosti 5 m (nebo jakýkoliv jiný pravoúhlý trojúhelník s ním podobný)



Sklon svahů nejsnáze porovnáme tím, že vypočteme úhel svahu se sklonem 5 %.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{100} \Rightarrow \alpha = \operatorname{tg}^{-1} 0,05 = 2^\circ 52'$$

Svah o sklonu 5° je příkřejší než svah o sklonu 5 %.

Pedagogická poznámka: Během řešení příkladu žákům radím dvakrát: za prvé, že sklon v procentech nesouvisí přímo se sklonem ve stupních (není z něho nijak odvozen) a za druhé, že stoprocentní sklon představuje svah se sklon 45° .

Př. 2: Jako nejprudší sjezdovka v ČR bývá označována Horní Šance v šumavském areálu Špičák. V nejprudším místě svah na vodorovné vzdálenosti 95 m klesá o 61 m. Urči sklon svahu ve stupních i procentech. Porovnej s údaji uváděnými na internetu.

Sklon ve stupních

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{61}{95} \Rightarrow \alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{61}{95} \right) = 32^\circ 42'$$

Sklon v procentech

100 %	...	95
x	...	61

$$\frac{x}{61} = \frac{100}{95} \Rightarrow x = \frac{100}{95} \cdot 61 = 64,21 \%$$

Sjezdovka má sklon $32^{\circ}42'$ (64 %).

Př. 3: Železniční značka (sklonovník) na obrázku informuje strojvůdce, že na následujícím úseku dlouhém 654 m trať klesá se sklonem 12 ‰. Pod jakým úhlem trať klesá? O kolik metrů se na daném úseku sníží nadmořská výška trati?



Sklon trati ve stupních: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{1000} \Rightarrow \alpha = \operatorname{tg}^{-1}(0,012) = 0,6875^{\circ} = 0^{\circ}41'$

Snížení nadmořské výšky:

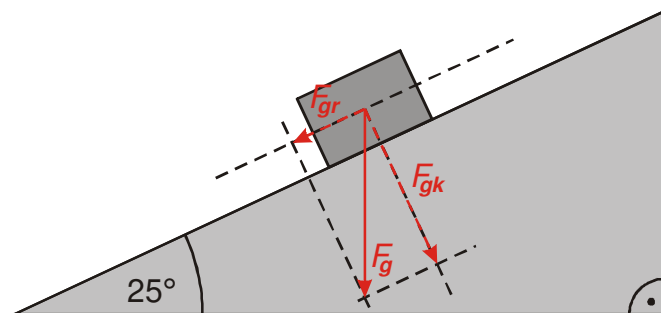
100 ‰	...	654
1,2 ‰	...	x

$$\frac{x}{1,2} = \frac{654}{100} \Rightarrow x = \frac{654}{100} \cdot 1,2 \text{ m} = 7,8 \text{ m}$$

Trať klesá pod úhlem $0^{\circ}41'$, na označeném úseku klesne o 7,8 m.

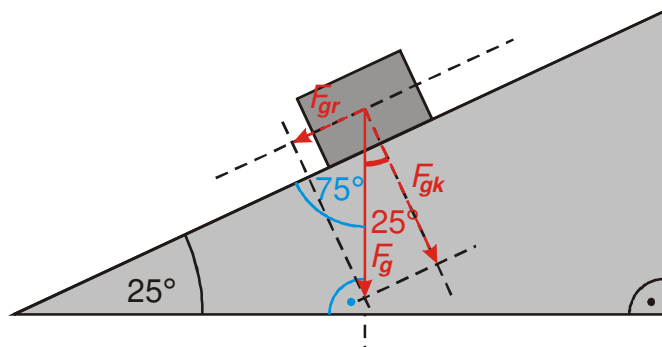
Př. 4: Na nakloněné rovině s úhlem 25° stojí krabice o hmotnosti 25 kg. Vypočti rovnoběžnou a kolmou složku gravitační síly, která na krabici působí.

Nakreslíme obrázek:

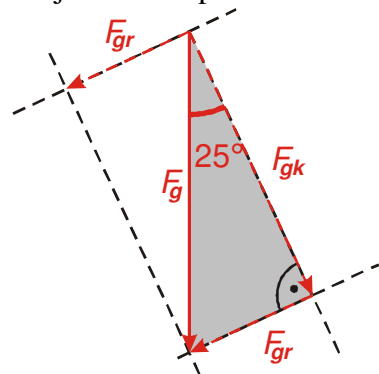


Podobná situace jako před několika hodinami při probírání podobnosti. Síla F_g a její složky tvoří trojúhelník, který je podobný trojúhelníku, který určuje nakloněnou rovinu.

Snadno dopočítáme, že síla F_g svírá se svoji složkou F_{gk} na obrázku úhel 25° .



Trojúhelník si překreslíme a vypočteme jeho strany.



$$\sin 25^\circ = \frac{F_{gr}}{F_g} \Rightarrow F_{gr} = F_g \cdot \sin 25^\circ = 250 \cdot \sin 25^\circ \text{ N} = 106 \text{ N}$$

$$\cos 25^\circ = \frac{F_{gk}}{F_g} \Rightarrow F_{gk} = F_g \cdot \cos 25^\circ = 250 \cdot \cos 25^\circ \text{ N} = 227 \text{ N}$$

Rovnoběžná složka gravitační síly má velikost 106 N, kolmá 227 N.

Př. 5: Jakou maximální hmotnost může mít vozík, který tlačíme do nakloněné rovny o úhlu 20° , jestliže jsme schopni tlačit silou 250 N?

Pokud tlačení předmětu po nakloněné rovině musíme překonat rovnoběžnou složku gravitační síly \Rightarrow maximální hmotnost vozíku může být pouze taková, aby se velikost F_{gr} vozíku vyrovnala síle, kterou jsme schopni tlačit.

$$\sin \alpha = \frac{F_{gr}}{F_g} \quad / \cdot F_g$$

$$F_g \cdot \sin \alpha = F_{gr} \quad / : \sin \alpha$$

$$F_g = \frac{F_{gr}}{\sin \alpha} = \frac{250}{\sin 20^\circ} \text{ N} = 731 \text{ N}$$

Do nakloněné roviny o úhlu 20° můžeme silou 250 N vytlačit vozík o maximální hmotnosti 73 kg.

Př. 6: Jaký maximální úhel může mít nakloněná rovina, po které dokáže vyjet sekací traktůrek s hnací silou 300 N a hmotností 75 kg, pokud v něm sedí pan ředitel o hmotnosti 85 kg?

Podobné jako předchozí příklad, hnací síla traktůrku představuje maximální možnou velikost rovnoběžné složky F_{gr} pro traktůrek s panem ředitelem.

Celková hmotnost: $75 + 85 \text{ kg} = 160 \text{ kg} \Rightarrow F_g = 1600 \text{ N}$.

$$\sin \alpha = \frac{F_{gr}}{F_g} = \frac{300}{1600} \Rightarrow \alpha = 10^\circ 48'$$

Sekací traktůrek s panem ředitelem může vyjet do nakloněné roviny stoupající maximálně pod úhlem $10^\circ 48'$.

Př. 7: Najdi na internetu mapu sjezdovky Šance v areálu Špičák u Železné Rudy a zjisti průměrný sklon celé černé sjezdovky. Porovnej s průměrným sklonem černé sjezdovky v areálu Svatý Petr u Špindlerova Mlýna.

sjezdovka Šance celá: 692 m vodorovně 244 svisle.

$$\text{průměrný sklon: } \frac{244}{692} = 0,353 \equiv 35,3 \%$$

sjezdovka Svatý Petr: 422 m vodorovně, 171 m svisle.

$$\text{průměrný sklon: } \frac{171}{422} = 0,405 \equiv 40,5 \%$$

Průměrný sklon celé sjezdovky Šance na Špičáku 35,3 % je menší než průměrný sklon 40,5 % černé sjezdovky v areálu Svatý Petr u Špindlerova Mlýna.

Shrnutí: Sklon v procentech udává poměr vodorovné a svislo odvěsny nakloněné roviny.