4.4.1 Funkce

Předpoklady:

Pedagogická poznámka: Na prvních šest příkladů nechávám maximálně 25 minut, už na začátku upozorňuji, aby si dvojice v lavicích rozdělili práci tak, aby dohromady stihli všechny příklady.

Př. 1: Jak velká bude plocha čtvercového záhonu o straně 0,5 m, 1 m, 4 m, 5 m? Najdi vztah, který umožňuje získat plochu dosazením délky strany.

Plocha čtverce: $S = a \cdot a = a^2$.

Délka strany $a\left[\mathrm{m}\right]$	0,5	1	4	5
Plocha záhonu $S\left[\mathrm{m}^2\right]$	0,25	1	16	25

Př. 2: 1 metrák hnědého uhlí stojí 370 Kč. Při vlastní dopravě se účtuje 10 Kč/q za nakládku. Kolik bude stát 5 q, 10 q, 20 q, 35 q uhlí s vlastní dopravou? Najdi vztah, který umožňuje spočítat cenu uhlí pro libovolný objednaný počet metráků.

Kromě ceny uhlí musí za každý metrický cent zaplatit ještě 10 Kč za nakládku $\Rightarrow$ faktická cena za 1 q je 380 Kč.
Cena uhlí: $n = 380 \cdot m$.

Hmotnost uhlí $m\left[\mathrm{q}\right]$	5	10	20	35
Cena $n\left[\mathrm{Kč}\right]$	1 900	3 800	7 600	13 300

Př. 3: Kolik různých dělitelů mají čísla 2, 4, 8, 11? Najdi vztah, který umožňuje získat počet dělitelů dosazením čísla.

Vztah nejde nalézt, u každého čísla musíme najít všechny dělitele a zjistit jejich počet.

$D_2 = \{1; 2\} \Rightarrow 2$

$D_4 = \{1; 2; 4\} \Rightarrow 3$

$D_8 = \{1; 2; 4; 8\} \Rightarrow 4$

$D_{11} = \{1; 11\} \Rightarrow 2$

Číslo x	2	4	8	11
Počet dělitelů n	2	3	4	2

Př. 4: Cesta na zahradu je dlouhá 7,2 km. Jak dlouho bude trvat, pokud se budeme pohybovat rychlostí 5 km/h, 9 km/h, 20 km/h, 60 km/h? Najdi vztah, který umožňuje dosazením spočítat dobu strávenou na cestě pro libovolnou rychlost.

Doba nutná k cestě: $t = \frac{s}{v} = \frac{7,2}{v}$.

Rychlost $v[\text{km/h}]$	5	9	20	60
Doba cesty $t[\text{h}]$	1,44	0,8	0,36	0,12

Př. 5: Pro která čísla platí, že se jejich druhá mocnina rovná 4, 6, 9, 16? Najdi vztah, který umožňuje tato čísla určit dosazením.

Hledáme čísla, která se po umocnění na druhou rovnají 4 $\Rightarrow$ dvě možnosti: 2 a –2. Podobné pro ostatní čísla, můžeme zapsat pomocí odmocniny $\pm\sqrt{4}$.
Obecně: $y = \pm\sqrt{x}$.

Číslo x	4	6	9	16
Číslo, jehož druhá mocnina se rovna y	± 2	$\pm\sqrt{6}$	± 3	± 4

Př. 6: V internetovém obchodě stojí učebnice angličtiny 399 Kč, poštovné za zaslání objednávky pak přijde na 129 Kč. Urči cenu za jednu učebnici, pokud si v zásilce objednáme 1, 3, 5, 10, 15 učebnic. Najdi vztah, ze kterého můžeme dosazením určit cenu za libovolný počet učebnic objednaných v jedné zásilce.

Cena za 1 učebnici: $399 + 129 = 528$ Kč.
Cena za tři učebnice: $3 \cdot 399 + 129 = 1326$ Kč $\Rightarrow$ za 1 učebnici (při nákupu tří učebnic) $1326 : 3 = 442$ Kč.

K ceně jedné učebnice připočteme část ceny dopravy $\Rightarrow$ vztah: $n = 399 + \frac{129}{n}$.

Počet učebnici p	1	3	5	10	15
Cena jedné učebnice n	528	442	424,8	411,9	407,6

Př. 7: Jeden z předchozích příkladů se zásadně liší od ostatních. Který to je a proč?

Dvě možnosti:

- odlišný je příklad 3 (počet dělitelů), protože se nepodařilo najít funkční vztah, který by umožňoval z čísla spočíst jeho počet dělitelů,
- odlišný je příklad 5 (hledání čísel, jejichž druhá mocnina se rovná číslu, protože pro každé číslo získáváme dva výsledky (ve všech ostatních případech je výsledek pouze jeden).

Pedagogická poznámka: Naprostá většina žáků navrhne případ 3 (neexistující funkční závislost), pokud je vyzvete, aby našli něco jiného budou tápat. Po chvíli proto prozradím, že výjimkou je příklad 5 a nechám je chvilku přemýšlet o tom, čím se od ostatních liší (pak už na to někteří přijdou).

Požadavek na jednoznačnost je v matematice velmi důležitý, zajišťuje bezespornost a stejnost výsledků, proto mají postupy, které vedou k jednoznačným výsledkům v matematice speciální postavení a označujeme je jako funkce.

Funkce je předpis, který z hodnot jedné proměnné vytváří jednoznačně hodnoty jiné proměnné

Funkce je vlastně krabička (někdy méně, jindy více tajemná), která z čísla vyrobí jednoznačně jiné číslo.

Př. 8: Které z úvodních příkladů nepopisují funkci?

Jedinou "nefunkcí" mezi úvodními příklady je příklad 5.

Př. 9: Obě proměnné u funkcí rozlišujeme a jednu označujeme jako nezávisle proměnnou, druhou jako závisle proměnnou. Která z proměnných je nezávislá a která závislá v předchozích příkladech?

Nezávislé proměnné (vybíráme si je bez ohledu na hodnoty jiných proměnných):
1. Délka strany záhonu.
2. Hmotnost nakoupeného uhlí.
3. Číslo, ke kterému máme najít počet dělitelů.
4. Rychlost dopravy na zahradu.
5. Není fce.
6. Počet objednaných učebnic.

Závislé proměnné (jejich hodnoty jsou určeny hodnotou nezávislé proměnné):
1. Plocha záhonu.
2. Cena nakoupeného uhlí.
3. Počet dělitelů zadaného čísla.
4. Doba strávená cestou na zahradu.
5. Není fce.
6. Jednotková cena zaplacená za učebnici.

Závislost (nezávislost) proměnné je dána formulací úlohy. Změnou zadání příkladu 1 na: "Urči délku strany čtvercového záhonu o ploše $0,25\,\mathrm{m}^2$, $0,5\,\mathrm{m}^2$, $2\,\mathrm{m}^2$, $5\,\mathrm{m}^2$." by se role proměnných prohodily:
- nezávisle proměnnou by byla plocha záhonu (z ní teď vycházíme),
- závisle proměnnou by byla délka strany záhonu (tu určujeme tak, abychom dosáhli požadovaného obsahu).

Nezávisle proměnná se v matematice většinou označuje písmenem *x*, závisle proměnná písmenem *y*.
Závislost proměnné *y* na proměnné *x* vyjadřujeme různě:
- proměnná *y* je funkcí proměnné *x*,
- *y* je funkcí *x*.

Obecně se píše: $y = f(x)$ (čteme „ypsilon se rovná ef iks“).

Písmeno *f* označuje funkci, nebo předpis pro určení hodnoty *y* z hodnoty *x*.
Například pro první příklad můžeme psát:

- $y = x^2$,
- $f(x) = x^2$,
- $f : y = x^2$,
- ....

Pokud pracujeme s větším počtem funkcí, rozlišujeme je:

- různými písmeny v označení funkcí: $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{x+3}$, $h(x) = 2x - 3$, ...
- indexy u označení funkce: $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \frac{1}{x+3}$, $f_3(x) = 2x - 3$, ...

Shrnutí: Předpis, který jednoznačně přiřazuje reálným číslům reálná čísla označujeme v matematice jako funkci.