

### 4.4.3 Definiční obor funkce

**Předpoklady:** 040402

**Př. 1:** Zapiš tabulkou funkci, pro kterou platí:  $D(f) = \{-3; 1; 4; 5\}$ ,  $H(f) = \{0; 1; 2\}$ .

$$D(f) = \{-3; 1; 4; 5\}$$

$$H(f) = \{0; 1; 2\}$$

$x$	-3	1	4	5
$y$	0	1	2	0

**Pedagogická poznámka:** Uvedené řešení není jediné. Správným řešením je každá tabulka, která má v první řádce všechna čísla uvedená v definičním oboru a v druhém všechna čísla z oboru hodnot, jedno z nich uvedené dvakrát. Na tom, jak jsou k sobě čísla přiřazena nezáleží.

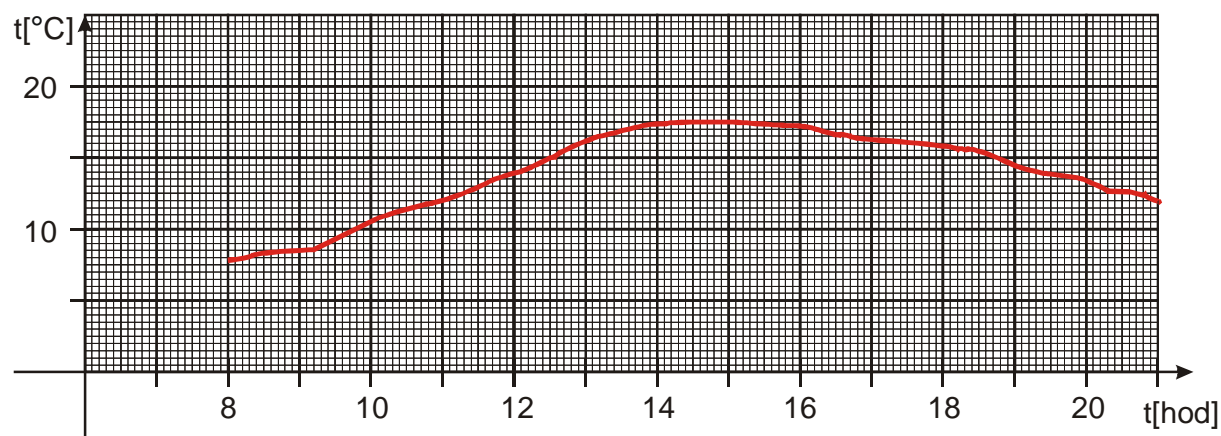
**Př. 2:** Olda si popletl význam definičního oboru a oboru hodnot a vytvořil následující tabulku. Jde o funkci?

$x$	0	1	2	0
$y$	-3	1	4	5

Nejde o funkci. Číslo 0 jsou přiřazeny dvě různé hodnoty  $\Rightarrow$  přiřazení není jednoznačné.

**Př. 3:** Na obrázku je termograf - grafické zachycení změn teploty v průběhu dne.

- Urči veličiny, které představují nezávisle a závisle proměnou.
- Urči  $f(8)$ ,  $f(13,5)$ ,  $f(20,9)$ ,  $f(22)$ .
- V které hodině se teplota rovnala  $9^\circ\text{C}$ ,  $15^\circ\text{C}$ ,  $13,5^\circ\text{C}$ ?
- Urči  $D(f)$  a  $H(f)$ .
- Kdy byla funkce rostoucí a kdy klesající?
- V kterém období byla teplota vyšší než  $14^\circ\text{C}$ ?



a) Urči veličiny, které představují nezávisle a závisle proměnou.

Nezávisle proměnná: čas.

Závislá proměnná: teplota.

b)  $f(8) = 7,8^{\circ}\text{C}$                        $f(13,5) = 16,8^{\circ}\text{C}$                        $f(20,9) = 11,9^{\circ}\text{C}$

$f(22)$  - neexistuje (graf pro tuto hodnotu času není nakreslený).

c)  $t = 9^{\circ}\text{C}$  v čase 9,35 h.                       $15^{\circ}\text{C}$  v čase 12,55 h a 18,73 h.  
 $13,5^{\circ}\text{C}$  v čase 11,3 h a 20,7 h.

d) Urči  $D(f)$  a  $H(f)$ .

$$D(f) = \langle 8; 21 \rangle$$

$$H(f) = \langle 7, 8; 17, 5 \rangle$$

e) Funkce byla rostoucí od 8 h do 14,7 h, klesající od 14,7 h do 21 h.

f) Teplota byla vyšší než  $14^{\circ}\text{C}$  od 12,1 h do 19,3 h

**Pedagogická poznámka:** V předchozím příkladu není problém v samotném určování hodnot, ale v jeho přesnosti. Žáci ví, kde mají hledat, ale s přepočítáváním čtverečků a přesným odečítáním mají problémy.

**Př. 4:** Jaká omezení má zadání funkce pomocí grafu? Jaké má graf přednosti?

Přednosti: názornost, celkový pohled.

Omezení: nejde zobrazit funkce, jejichž definiční obor jde k nekonečnu, odečítání hodnot je pouze přibližné.

Vrátíme se k definičnímu oboru. Pokud není definiční obor u funkce dané vzorcem uveden, má se za to, že do něj patří všechna čísla, pro která můžeme hodnotu vypočítat.

**Př. 5:** Urči definiční obor funkce.

a)  $y = 2x - 1$                       b)  $y = \frac{1}{x}$                       c)  $y = x^2$                       d)  $y = \sqrt{x}$

a)  $y = 2x - 1$

Předpis neobsahuje žádnou operaci, která se nedá provádět se všemi čísly  $\Rightarrow D(f) = R$ .

b)  $y = \frac{1}{x}$

Předpis obsahuje dělení (nesmíme dělit nulou)  $\Rightarrow$  výraz ve jmenovateli musí být různý od nuly  $\Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow D(f) = R - \{0\}$ .

c)  $y = x^2$

Předpis neobsahuje žádnou operaci, která se nedá provádět se všemi čísly  $\Rightarrow D(f) = R$ .

d)  $y = \sqrt{x}$

Předpis obsahuje dělení (nesmíme dělit nulou)  $\Rightarrow$  výraz ve jmenovateli musí být různý od nuly  $\Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow D(f) = R - \{0\}$ .

**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklad neřešíme příliš dlouho, jde spíš o opakování vlastností operací. Zajímavé to začne být u dalšího příkladu.

**Př. 6:** Urči definiční obor funkce.

$$\text{a) } y = \frac{1}{x+1} \quad \text{b) } y = \frac{1}{2x-3} \quad \text{c) } y = \frac{1}{x^2+1} \quad \text{d) } y = \frac{1}{x^2-1}$$

Všechny funkce obsahují dělení  $\Rightarrow$  hlídáme, aby ve jmenovateli nebyl zlomek.

$$\text{a) } y = \frac{1}{x+1}$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow D(f) = R - \{-1\}$$

$$\text{b) } y = \frac{1}{2x-3}$$

$$2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \Rightarrow D(f) = R - \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

$$\text{c) } y = \frac{1}{x^2+1}$$

$$x^2+1=0, \text{ nenastane nikdy } (x^2 \geq 0) \Rightarrow D(f) = R$$

$$\text{d) } y = \frac{1}{x^2-1}$$

$$x^2-1=(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow$$

- $x=1$
- $x=-1$

$$\Rightarrow D(f) = R - \{\pm 1\}$$

**Př. 7:** Urči definiční obor funkce.

$$\text{a) } y = \sqrt{x-2} \quad \text{b) } y = \sqrt{2x+1} \quad \text{c) } y = \sqrt{3-x} \quad \text{d) } y = \sqrt{5-2x}$$

Ve všech předpisech se vyskytuje odmocnina, kterou nemůžeme určit ze záporných čísel  $\Rightarrow$  do definičního oboru zahrneme pouze čísla, pro která pod odmocninou získáme nezáporné číslo.

$$\text{a) } y = \sqrt{x-2}$$

$$x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D(f) = \langle 2; \infty \rangle$$

$$\text{b) } y = \sqrt{2x+1}$$

$$2x+1 \geq 0 \quad / -1$$

$$2x \geq -1 \quad / : 2$$

$$x \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow D(f) = \left\langle -\frac{1}{2}; \infty \right\rangle$$

$$\text{c) } y = \sqrt{3-x}$$

$$3-x \geq 0 \quad /+x$$

$$3 \geq x \Rightarrow D(f) = (-\infty; 3]$$

$$\text{d) } y = \sqrt{5-2x}$$

$$5-2x \geq 0 \quad /+2x$$

$$5 \geq 2x \quad /:2$$

$$\frac{5}{2} \geq x \Rightarrow D(f) = \left\langle -\infty; \frac{5}{2} \right\rangle$$

**Př. 8:** Urči definiční obor funkce.

$$\text{a) } y = \frac{1}{x^2-5x}$$

$$\text{b) } y = \frac{1}{x^2-4}$$

$$\text{c) } y = \frac{1}{x^2-x-12}$$

Všechny funkce obsahují dělení  $\Rightarrow$  hlídáme, aby ve jmenovateli nebyl zlomek.

$$\text{a) } y = \frac{1}{x^2-5x}$$

$$x^2-5x = x(x-5) = 0 \Rightarrow$$

- $x = 0$
- $x = 5$

$$\Rightarrow D(f) = R - \{0; 5\}$$

$$\text{b) } y = \frac{1}{x^2-4}$$

$$x^2-4 = (x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow$$

- $x = 2$
- $x = -2$

$$\Rightarrow D(f) = R - \{\pm 2\}$$

$$\text{c) } y = \frac{1}{x^2-x-12}$$

$$x^2-x-12 = (x-4)(x+3) = 0 \Rightarrow$$

- $x = 4$
- $x = -3$

$$\Rightarrow D(f) = R - \{-3; 4\}$$

**Shrnutí:** Pokud není definiční obor u funkce dané vzorcem uveden, má se za to, že do něj patří všechna čísla, pro která můžeme hodnotu vypočítat.