

4.4.9 Funkce přímá úměrnost I

Předpoklady: 040408

Pedagogická poznámka: Na hodinu rozdávám žákům čtverečkované papíry.

Př. 1: V učebnicích matematiky bývá funkce přímá úměrnost definována takto:
"Přímou úměrností nazýváme funkci $f : y = kx$, $x \in R$, kde k je nenulové reálné číslo zvané koeficient přímé úměrnosti f ."
Jak se tato definice liší od pojetí přímé úměrnosti z minulé hodiny? Co je grafem takto definované přímé úměrnosti?

Dva rozdíly v definici:

- $x \in R \Rightarrow$ za x můžeme dosazovat i záporná čísla,
- k je nenulové reálné číslo $\Rightarrow k$ může být i záporné.

Grafy, které jsme kreslili v minulé hodině, se příliš nezmění, jen se prodlouží do záporných čísel.

Grafem přímé úměrnosti je přímka procházející bodem $[0; 0]$ (počátkem soustavy souřadnic).

Domluva: Od tohoto okamžiku budeme na definiční obor přímé úměrnosti, která přímo nepředstavuje reálnou situaci, považovat množinu všech čísel, pro která dokážeme určit hodnotu, tedy množinu všech reálných čísel R .

Př. 2: Doplň tabulku hodnot funkce $y = 3x$.

x	-2	-0,3	1	$\frac{2}{5}$			
y					-3	1	$\frac{1}{3}$

Pokud máme dopočítat hodnoty y , musíme dosadit do vzorce $y = 3x$.

- $x = -2: y = 3 \cdot (-2) = -6,$
- $x = -0,3: y = 3 \cdot (-0,3) = -0,9,$
- $x = 1: y = 3 \cdot 1 = 3,$
- $x = \frac{2}{5}: y = 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5}.$

Pokud máme z hodnot y vypočítat hodnoty x , musíme si předpis "obrátit" (vyjádřit x).

$$y = 3x \quad /: 3$$

$$x = \frac{y}{3}$$

- $y = -3: x = \frac{y}{3} = \frac{-3}{3} = -1,$
- $y = 1: x = \frac{y}{3} = \frac{1}{3},$

• $y = \frac{1}{3} : x = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

x	-2	-0,3	1	$\frac{2}{5}$	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
y	-6	-0,9	3	$\frac{6}{5}$	-3	1	$\frac{1}{3}$

Př. 3: Dopln tabulku.

Funkce	$y = 4x$	$y = -3x$	$y = -\frac{1}{7}x$	$y = \frac{1}{11}x$	$y = \frac{3}{5}x$	$y = -\frac{9}{7}x$	$y = kx$
souřadnice bodu [1; ?]							
souřadnice bodu [?; 1]							

Bod [1; ?] \Rightarrow známe $x = 1 \Rightarrow y = 4x = 4 \cdot 1 = 4$. Podobně v ostatních případech.

Bod [?; 1] \Rightarrow známe $y = 1 \Rightarrow 1 = 4x \Rightarrow x = \frac{1}{4}$. Podobně v ostatních případech.

Funkce	$y = 4x$	$y = -3x$	$y = -\frac{1}{7}x$	$y = \frac{1}{11}x$	$y = \frac{3}{5}x$	$y = -\frac{9}{7}x$	$y = kx$
souřadnice bodu [1; ?]	[1; 4]	[1; -3]	$[1; -\frac{1}{7}]$	$[1; \frac{1}{11}]$	$[1; \frac{3}{5}]$	$[1; -\frac{9}{7}]$	[1; k]
souřadnice bodu [?; 1]	$[\frac{1}{4}; 1]$	$[-\frac{1}{3}; 1]$	[-7; 1]	[11; 1]	$[\frac{5}{3}; 1]$	$[-\frac{7}{9}; 1]$	$[\frac{1}{k}; 1]$

Př. 4: Nakresli do jednoho grafu obrázky funkcí. Využij body s celočíselnými souřadnicemi.

a) $y = -\frac{1}{3}x$ b) $y = -x$ c) $y = -\frac{1}{4}x$ d) $y = 2x$

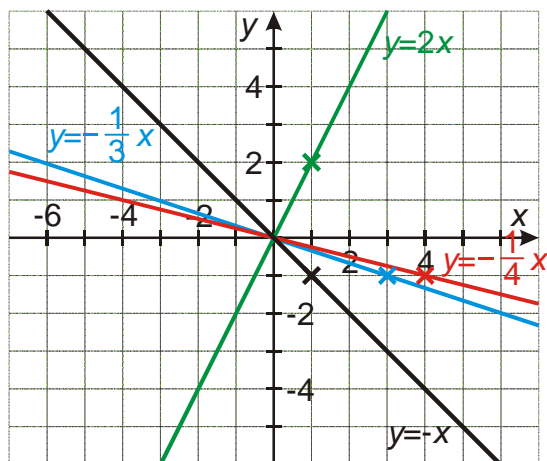
U všech funkcí stačí dopočítat jediný bod, jako druhý využijeme bod [0; 0], kterým prochází graf každé přímé úměrnosti.

a) $y = -\frac{1}{3}x$ $x = 3: y = -\frac{1}{3}x = -\frac{1}{3} \cdot 3 = -1 \Rightarrow$ body [0; 0] a [3; -1]

b) $y = -x$ $x = 1: y = -x = -1 \Rightarrow$ body [0; 0] a [1; -1]

c) $y = -\frac{1}{4}x$ $x = 4: y = -\frac{1}{4}x = -\frac{1}{4} \cdot 4 = -1 \Rightarrow$ body [0; 0] a [4; -1]

d) $y = 2x$ $x = 1: y = 2x = 2 \cdot 1 = 2 \Rightarrow$ body [0; 0] a [1; 2]



Př. 5: Narýsuj do čtvercové sítě grafy následujících přímých úměrností.

a) $y = 0,5x$ b) $y = -2x$ c) $y = \frac{8}{3}x$ d) $y = -\frac{3}{4}x$ e) $y = \frac{6}{5}x$

Pro kreslení grafů využij vrcholy čtvercové sítě. U každé funkce najdi vrcholy sítě, kterými graf prochází. Vypiš jejich souřadnice. Co platí pro souřadnice takto vypsaných bodů u jednotlivých funkcí?

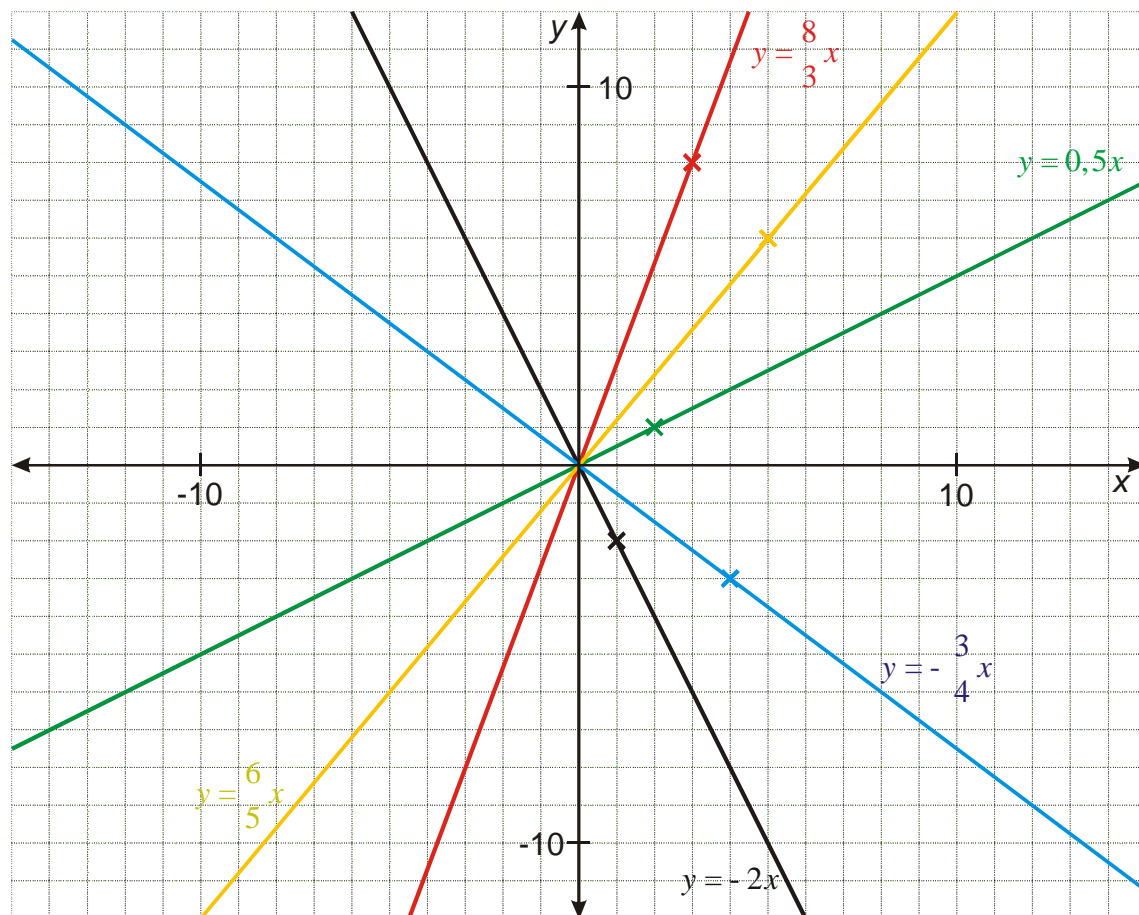
a) $y = 0,5x$ $x = 2: y = 0,5x = 0,5 \cdot 2 = 1 \Rightarrow$ body $[0; 0]$ a $[2; 1]$

b) $y = -2x$ $x = 1: y = -2x = -2 \cdot 1 = -2 \Rightarrow$ body $[0; 0]$ a $[1; -2]$

c) $y = \frac{8}{3}x$ $x = 3: y = \frac{8}{3}x = \frac{8}{3} \cdot 3 = 8 \Rightarrow$ body $[0; 0]$ a $[3; 8]$

d) $y = -\frac{3}{4}x$ $x = 4: y = -\frac{3}{4}x = -\frac{3}{4} \cdot 4 = -3 \Rightarrow$ body $[0; 0]$ a $[4; -3]$

e) $y = \frac{6}{5}x$ $x = 5: y = \frac{6}{5}x = \frac{6}{5} \cdot 5 = 6 \Rightarrow$ body $[0; 0]$ a $[5; 6]$



Vrcholy sítě, kterými prochází grafy:

$$y = 0,5x$$

Body: $[0; 0]$, $[2; 1]$, $[4; 2]$, $[6; 3]$, $[8; 4]$, ..., $[-2; -1]$, $[-4; -2]$, $[-6; -3]$, ...

Pro všechny body platí $\frac{y}{x} = 0,5$ (upravený předpis funkce).

$$y = -2x$$

Body: $[0; 0]$, $[1; -2]$, $[2; -4]$, $[3; -6]$, $[4; -8]$, ..., $[-1; 2]$, $[-2; 4]$, $[-3; 6]$, ...

Pro všechny body platí $\frac{y}{x} = -2$ (upravený předpis funkce).

$$y = \frac{8}{3}x$$

Body: $[0; 0]$, $[3; 8]$, $[6; 16]$, ..., $[-3; -8]$, $[-6; -16]$, ...

Pro všechny body platí $\frac{y}{x} = \frac{8}{3}$ (upravený předpis funkce).

$$y = -\frac{4}{3}x$$

Body: $[0; 0]$, $[3; -4]$, $[6; -8]$, $[9; -12]$, ..., $[-3; 4]$, $[-6; 8]$, $[-9; 12]$, ...

Pro všechny body platí $\frac{y}{x} = -\frac{4}{3}$ (upravený předpis funkce).

$$y = \frac{6}{5}x$$

Body: $[0; 0]$, $[5; 6]$, $[10; 12]$, ..., $[-5; -6]$, $[-10; -12]$, ...

Pro všechny body platí $\frac{y}{x} = \frac{6}{5}$ (upravený předpis funkce).

Př. 6: Které z funkcí z předchozího příkladu můžeme označit jako rostoucí? Které jako klesající? Pro které hodnoty koeficientu k , je funkce přímá úměrnost rostoucí? Kdy je klesající?

Rostoucí funkce (hodnoty y se zvětšují, když se zvětšují hodnoty x , graf jde zleva zdola doprava nahoru): $y = 0,5x$, $y = \frac{8}{3}x$, $y = \frac{6}{5}x$.

Klesající funkce (hodnoty y se zmenšují, když se zvětšují hodnoty x , graf jde zleva shora doprava dolů): $y = -2x$, $y = \frac{7}{3}x$, $y = \frac{7}{5}x$.

Funkce přímá úměrnost je rostoucí, pokud platí $k > 0$.

Funkce přímá úměrnost je klesající, pokud platí $k < 0$.

Př. 7: Najdi body s oběma celočíselnými souřadnicemi, kterými prochází graf přímé úměrnosti: a) $y = \frac{3}{2}x$, b) $y = \frac{3}{5}x$ c) $y = -\frac{7}{4}x$

U každého bodu se pokus zapsat všechny možnosti pomocí libovolného celého čísla k .

a) $y = \frac{3}{2}x$

Podobné jako předminulý příklad \Rightarrow stačí rozšiřovat zlomek v předpisu funkce.

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \frac{-3}{-2} = \frac{-6}{-4} = \dots \Rightarrow \text{body } [0; 0], [2; 3], [4; 6], [6; 9], [-2; -3], [-4; -6] \dots$$

Všechny body se dají napsat $[2k; 3k]$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

b) $y = \frac{3}{5}x$

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{-3}{-5} = \frac{-6}{-10} = \dots \Rightarrow \text{body } [0; 0], [5; 3], [10; 6], [15; 9], [-5; -3], [-10; -6] \dots$$

Všechny body se dají napsat $[5k; 3k]$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

c) $y = -\frac{7}{4}x$

$$\frac{-7}{4} = \frac{-14}{8} = \frac{-21}{12} = \frac{7}{-4} = \frac{14}{-8} = \dots \Rightarrow \text{body } [0; 0], [4; -7], [8; -14], [12; -21], [-4; 7],$$

$[-8; 14] \dots$

Všechny body se dají napsat $[4k; -7k]$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Shrnutí: Celočíselné souřadnice přímé úměrnosti mají ledacos společného s poměrem.