

4.4.10 Funkce přímá úměrnost II

Předpoklady: 040409

Př. 1: Nakresli do jednoho obrázku na čtverečkováný papír grafy přímých úměrností. Využívej body s celočíselnými souřadnicemi.

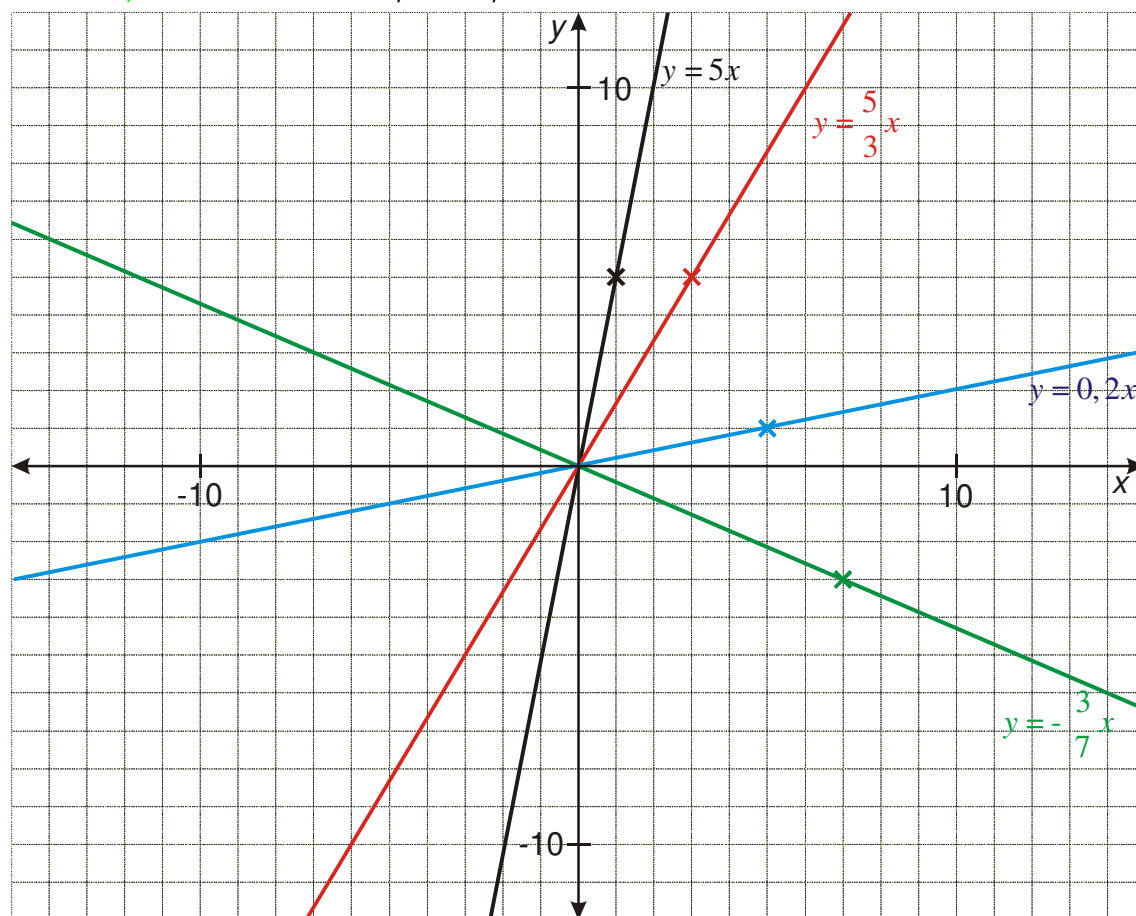
a) $y = 5x$ b) $y = \frac{5}{3}x$ c) $y = 0,2x$ d) $y = -\frac{3}{7}x$

a) $y = 5x$: $x = 1 \Rightarrow y = 5x = 5 \cdot 1 = 5 \Rightarrow$ body $[0; 0]$, $[1; 5]$

b) $y = \frac{5}{3}x$: $x = 3 \Rightarrow y = \frac{5}{3}x = \frac{5}{3} \cdot 3 = 5 \Rightarrow$ body $[0; 0]$, $[3; 5]$

c) $y = 0,2x$: $x = 5 \Rightarrow y = 0,2x = 0,2 \cdot 5 = 1 \Rightarrow$ body $[0; 0]$, $[5; 1]$

d) $y = -\frac{3}{7}x$: $x = 7 \Rightarrow y = -\frac{3}{7}x = -\frac{3}{7} \cdot 7 = -3 \Rightarrow$ body $[0; 0]$, $[7; -3]$

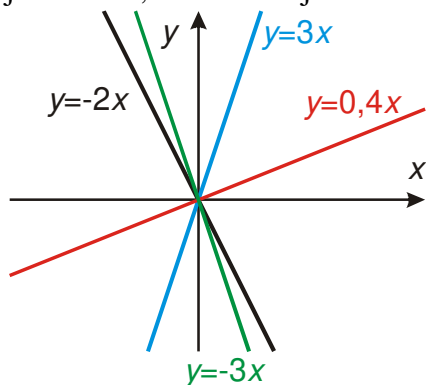


Př. 2: Nakresli do jednoho obrázku bez očíslovaných os grafy následujících přímých úměrností. a) $y = 0,4x$ b) $y = -3x$ c) $y = 3x$ d) $y = -2x$

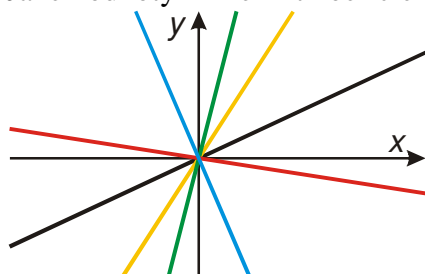
Funkce s kladným koeficientem, musí být rostoucí ($y = 0,4x$ a $y = 3x$), funkce se záporným koeficientem musí být klesající ($y = -3x$ a $y = -2x$).

Funkce s nejstrmějším grafem, mají koeficient s největší absolutní hodnotou ($y = 3x$ a $y = -3x$), funkce, která je nejpozvolnější, musí mít koeficient s malou absolutní hodnotou ($y = 0,4x$).

Funkce se stejnou absolutní hodnotou koeficientu ($y = 3x$ a $y = -3x$) jsou stejně strmé, jedna je rostoucí, druhá klesající.



Př. 3: V obrázku jsou nakresleny grafy následujících přímých úměrností: $y = 2x$, $y = \frac{3}{5}x$, $y = -3x$ a $y = -0,2x$. Přiřaď předpisy grafům. Pro který graf není uveden předpis? Jaké hodnoty může mít koeficient neuvedené přímé úměrnosti?

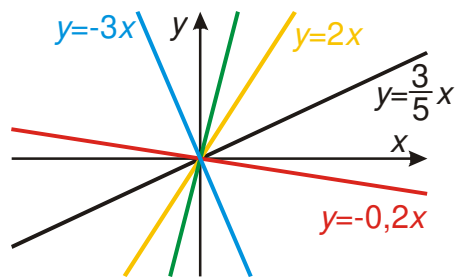


Funkce s kladným koeficientem, musí být rostoucí ($y = 2x$ a $y = \frac{3}{5}x$), funkce se záporným koeficientem musí být klesající ($y = -3x$ a $y = -0,2x$).

Čím je koeficient přímé úměrnosti v absolutní hodnotě větší, tím je její graf strmější.

- $y = 2x$: žlutý graf (rostoucí funkce, méně strmá než modrý graf),
- $y = \frac{3}{5}x$: černý graf (nejméně strmá rostoucí funkce),
- $y = -3x$: modrý graf (nejstrmější klesající funkce) $y = -0,2x$,
- $y = -0,2x$: červený graf (klesající funkce, málo strmý graf).

Předpis není uveden pro zelený graf - funkce strmější než funkce $y = -3x \Rightarrow$ jejím koeficientem bude kladné číslo větší než 3.



Př. 4: Dopočítej chybějící souřadnice bodů grafu funkce $y = \frac{2}{7}x$.

- a) [2; ?] b) [-14; ?] c) $\left[\frac{21}{5}; ?\right]$ d) [?; -1] e) $\left[?; \frac{2}{3}\right]$ f) [?; 5]

a) [2; ?] $y = \frac{2}{7}x = \frac{2}{7} \cdot 2 = \frac{4}{7}$ $\left[2; \frac{4}{7}\right]$

b) [-14; ?] $y = \frac{2}{7}x = \frac{2}{7} \cdot (-14) = -4$ [-14; -4]

c) $\left[\frac{21}{5}; ?\right]$ $y = \frac{2}{7}x = \frac{2}{7} \cdot \frac{21}{5} = \frac{6}{5}$ $\left[\frac{21}{5}; \frac{6}{5}\right]$

U dalších bodů známe y souřadnici a potřebujeme určit x -ovou \Rightarrow upravíme si předpis funkce.

$$y = \frac{2}{7}x \quad / \cdot \frac{7}{2}$$

$$x = \frac{7}{2}y$$

d) [?; -1] $x = \frac{7}{2}y = \frac{7}{2} \cdot (-1) = -\frac{7}{2}$ $\left[-\frac{7}{2}; -1\right]$

e) $\left[?; \frac{2}{3}\right]$ $x = \frac{7}{2}y = \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$ $\left[\frac{7}{3}; \frac{2}{3}\right]$

f) [?; 5] $x = \frac{7}{2}y = \frac{7}{2} \cdot 5 = \frac{35}{2}$ $\left[\frac{35}{2}; 5\right]$

Př. 5: Které z následujících bodů leží na grafu přímé úměrnosti $y = \frac{3}{4}x$?

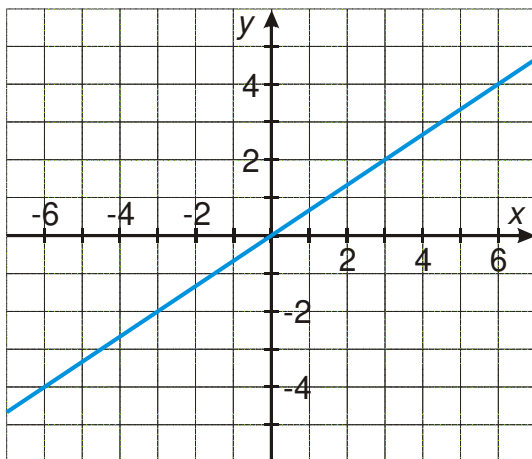
- a) [-8; -6] b) [3; 4] c) $\left[\frac{2}{9}; \frac{1}{6}\right]$ d) $\left[\frac{4}{3}; 1\right]$

Všechny body grafu funkce musí odpovídat předpisu $y = \frac{3}{4}x \Rightarrow$ musí platit $\frac{y}{x} = \frac{3}{4}$.

- a) $[-8; -6]: \frac{y}{x} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4} \Rightarrow$ bod $[-8; -6]$ leží na grafu funkce $y = \frac{3}{4}x$.
- b) $[3; 4]: \frac{y}{x} = \frac{4}{3} \neq \frac{3}{4} \Rightarrow$ bod $[3; 4]$ neleží na grafu funkce $y = \frac{3}{4}x$.
- c) $\left[\frac{2}{9}; \frac{1}{6}\right]: \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{9}} = \frac{9}{2 \cdot 6} = \frac{3}{4} \Rightarrow$ bod $\left[\frac{2}{9}; \frac{1}{6}\right]$ leží na grafu funkce $y = \frac{3}{4}x$.
- d) $\left[\frac{4}{3}; 1\right]: \frac{y}{x} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \Rightarrow$ bod $\left[\frac{4}{3}; 1\right]$ leží na grafu funkce $y = \frac{3}{4}x$.

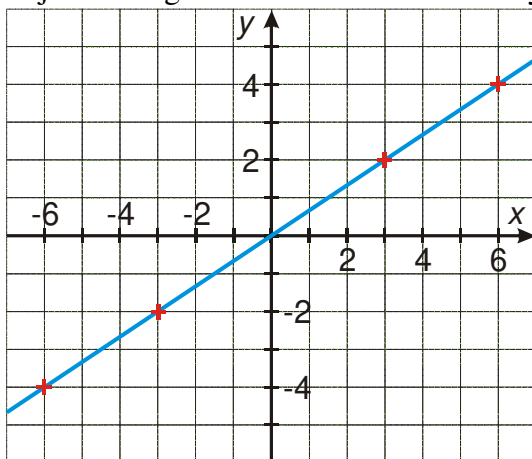
Pedagogická poznámka: Konkrétních realizací předchozího příkladu je mnoho (dosazení do předpisu s neznámými na obou stranách, vypočtení y z x a kontrola se souřadnicí bodu, ...).

Př. 6: Najdi předpis funkce na obrázku.



Předpis funkce určíme tím, že určíme koeficient. Koeficient můžeme vyjádřit pomocí hodnot x a y : $y = kx \Rightarrow k = \frac{y}{x}$.

Najdeme na grafu bod se snadno určitelnými souřadnicemi



Zjištěné hodnoty musí odpovídat předpisu funkce:

- $[3; 2]: k = \frac{y}{x} = \frac{2}{3}$.

Pro kontrolu další body:

- $[6; 4]: k = \frac{y}{x} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

- $[-3; -2]: k = \frac{y}{x} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$.

- $[-6; -4]: k = \frac{y}{x} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$.

Funkcí na obrázku je funkce $y = \frac{2}{3}x$.

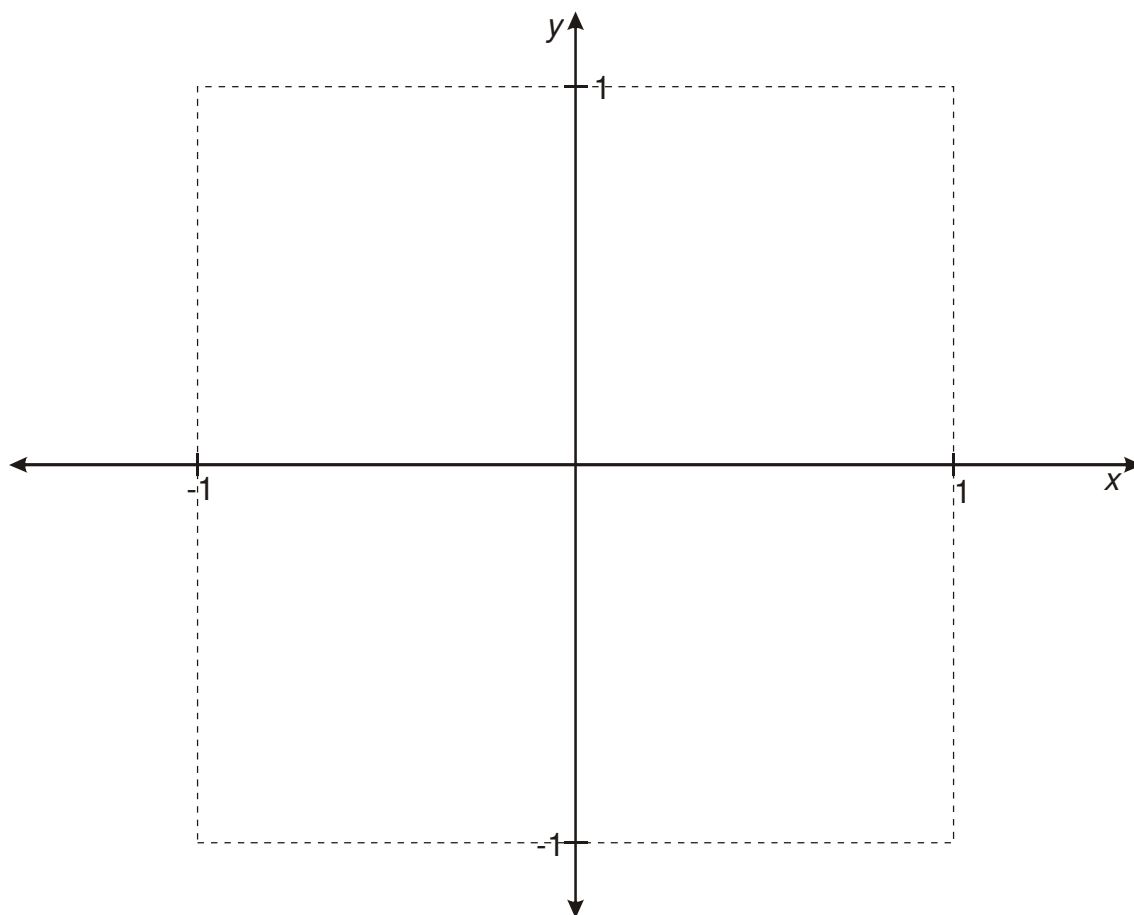
Př. 7: Dorýsuj do obrázku grafy přímých úměrností. Využij průsečíky grafů s vytečkovaným čtvercem.

a) $y = \frac{3}{11}x$

b) $y = \frac{13}{5}x$

c) $y = -0,37x$

d) $y = -\sqrt{15} \cdot x$



Vytečkovaný čtverec představuje body jejichž x-ová i y-ová souřadnice patří do intervalu $\langle -1; 1 \rangle$.

Vzdálenosti 1 na ose odpovídá 5 cm \Rightarrow vypočtené souřadnice musíme násobit pěti.

Všechny grafy budou procházet bodem $[0; 0] \Rightarrow$ pro každou přímou úměrnost musíme určit další bod ležící na vytečkovaném čtverci.

$$\text{a) } y = \frac{3}{11}x$$

$x = 1: y = \frac{3}{11} \cdot 1 = \frac{3}{11} \Rightarrow \text{bod } \left[1; \frac{3}{11}\right] \Rightarrow \text{na pravé svislé straně čtverce naměříme}$

$$5 \cdot \frac{3}{11} \text{ cm} = \frac{15}{11} \text{ cm} \doteq 1,36 \text{ cm od osy } x \text{ nahoru.}$$

$$\text{b) } y = \frac{13}{5}x$$

$a > 1 \Rightarrow \text{graf rychle stoupá} \Rightarrow \text{určitě se neprotne s pravou stranou čtverce. Hledáme průsečík s horní stranou čtverce.}$

$$y = 1: 1 = \frac{13}{5}x \quad / \cdot 5$$

$$5 = 13x \quad / : 13$$

$x = \frac{5}{13} \Rightarrow \text{bod } \left[\frac{5}{13}; 1\right] \Rightarrow \text{na horní straně čtverce naměříme } 5 \cdot \frac{5}{13} \text{ cm} = \frac{25}{13} \text{ cm} \doteq 1,92 \text{ cm}$

doprava od osy y .

$$\text{c) } y = -0,37x$$

$x = 1: y = -0,37 \cdot 1 = -0,37 \Rightarrow \text{bod } [1; -0,37] \Rightarrow \text{na pravé svislé straně čtverce naměříme}$

$5 \cdot 0,37 \text{ cm} = 1,85 \text{ cm}$ od osy x dolů (záporná hodnota souřadnice).

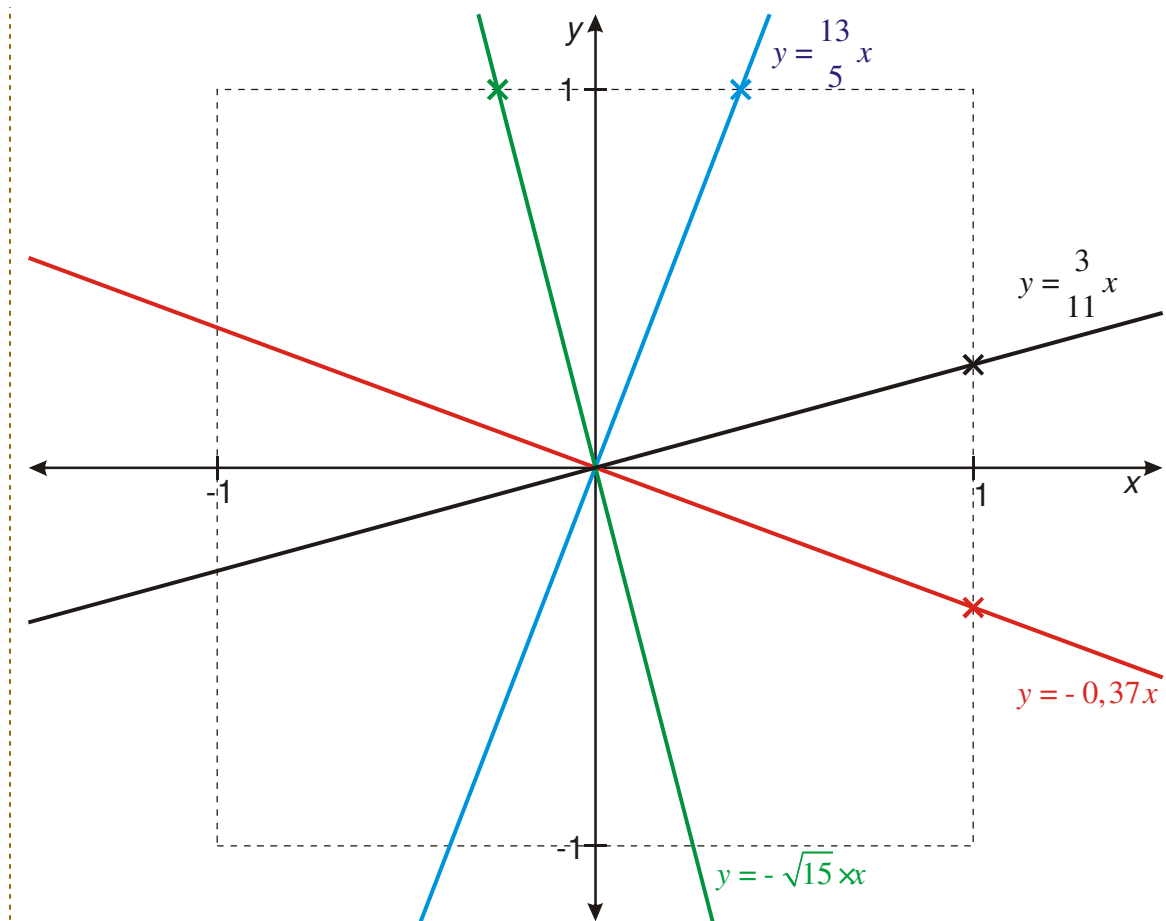
$$\text{d) } y = -\sqrt{15} \cdot x$$

$a > 1 \Rightarrow \text{graf rychle stoupá} \Rightarrow \text{určitě se neprotne s pravou stranou čtverce. Hledáme průsečík s horní stranou čtverce.}$

$$y = 1: 1 = -\sqrt{15}x \quad / : (-\sqrt{15})$$

$x = -\frac{1}{\sqrt{15}} = -\frac{\sqrt{15}}{15} \Rightarrow \text{bod } \left[-\frac{\sqrt{15}}{15}; 1\right] \Rightarrow \text{na horní straně čtverce naměříme}$

$$5 \cdot \frac{\sqrt{15}}{15} \text{ cm} = \frac{\sqrt{15}}{3} \text{ cm} \doteq 1,29 \text{ cm doleva od osy } y.$$



Shrnutí: