

### 4.4.14 Lineární funkce III

**Předpoklady:** 040413

**Př. 1:** Urči průsečíky grafu lineární funkce  $y = -3x + 5$  s osami  $x$  a  $y$ .

Průsečík s osou  $x$ :  $y$ -ová souřadnice je nulová  $\Rightarrow$

$$0 = -3x + 5 \quad / +3x$$

$$3x = 5 \quad / :3$$

$$x = \frac{5}{3}$$

Graf funkce  $y = -3x + 5$  se protíná s osou  $x$  v bodě  $\left[\frac{5}{3}; 0\right]$ .

Průsečík s osou  $y$ :  $x$ -ová souřadnice je nulová  $\Rightarrow$

$$y = -3x + 5 = -3 \cdot 0 + 5 = 5$$

Graf funkce  $y = -3x + 5$  se protíná s osou  $y$  v bodě  $[0; 5]$ .

**Př. 2:** Prohlédni si grafy lineárních funkcí, které jsi nakreslil v minulých hodinách. Kdy je lineární funkce rostoucí? Kdy je klesající?

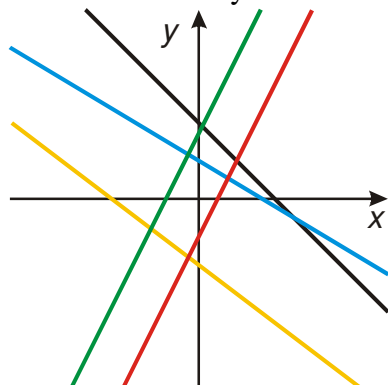
O sklonu lineární funkce rozhoduje koeficient  $a$  (koeficient  $b$  pouze posunuje graf nahoru a dolů)  $\Rightarrow$

- $a > 0 \Rightarrow$  funkce je rostoucí (podobně jako u přímé úměrnosti),
- $a < 0 \Rightarrow$  funkce je klesající (podobně jako u nepřímé úměrnosti),

**Př. 3:** Na obrázku jsou nakresleny grafy následujících lineárních funkcí. Popiš je.

a)  $y = 2x - 1$       b)  $y = 2x + \sqrt{3}$       c)  $y = -x + 2$       d)  $y = -\frac{3}{5}x + 1$

Která z nakreslených funkcí není v nabídce? Odhadni její předpis.



Nabídka obsahuje dvě rostoucí a dvě klesající funkce  $\Rightarrow$  jedna z klesajících funkcí není v nabídce.

Rostoucí funkce:

- $y = 2x - 1$ :  $b = -1$  graf je posunutý směrem dolů, průsečík s osou  $y$  má v záporné hodnotě  $\Rightarrow$  jde o červený graf,
- $y = 2x + \sqrt{3}$ :  $b = \sqrt{3}$  graf je posunutý směrem nahoru, průsečík s osou  $y$  má v kladné hodnotě  $\Rightarrow$  jde o zelený graf,

Kontrola: obě rostoucí funkce by měly mít stejný sklon (mají stejný koeficient  $a = 2$ ).

Klesající funkce:

- $y = -x + 2$ :  $b = 2$  graf je posunutý směrem nahoru, průsečík s osou  $y$  má v kladné hodnotě, větší než u zbývajících klesajících funkcí  $\Rightarrow$  jde o černý graf,
- $y = -\frac{3}{5}x + 1$ :  $b = 1$  graf je posunutý směrem nahoru, průsečík s osou  $y$  má v kladné hodnotě, menší než u funkce  $y = -x + 2$   $\Rightarrow$  jde o modrý graf,
- poslední funkce se protíná s osou  $y$  v záporné hodnotě  $\Rightarrow$  nejde ani o jednu z funkcí v nabídce.

Kontrola: funkce  $y = -x + 2$  má koeficient  $a = -1$  s větší absolutní hodnotou než funkce

$y = -\frac{3}{5}x + 1$  ( $a = -\frac{3}{5}$ )  $\Rightarrow$  graf funkce  $y = -x + 2$  musí klesat rychleji.

Žlutá funkce nemá předpis v nabídce:

- $b < 0$  - protíná osu  $x$  v záporné hodnotě (odhadem  $-2$ ),
- $a \in \left(-1; -\frac{3}{5}\right)$  (odhadem  $a = -\frac{4}{5}$ ) - strmost grafu je větší než funkce  $y = -\frac{3}{5}x + 1$  a menší než u funkce  $y = -x + 2$ .

**Př. 4:** Speciálním typem lineární funkce je funkce konstantní. Jak vypadá její předpis? Jaké má vlastnosti? Jak vypadá její graf?

Konstantní: neměnný, stálý  $\Rightarrow$  zřejmě jde o funkci, jejíž hodnoty se nemění  $\Rightarrow$  takovou funkcí byla funkce  $y = 2$  (pro všechna  $x$  měla hodnotu 2).

Předpis konstantní funkce:  $y = 0x + b = b$  (hodnota funkce nezávisí na  $x$ , protože hodnotu  $x$  násobíme nulou).

Není ani rostoucí ani klesající.

Grafem je přímka rovnoběžná s osou  $x$  (vodorovná).

**Př. 5:** Narýsuj na papír se čtvercovou sítí grafy lineárních funkcí.

a)  $y = 0,5x + 1$       b)  $y = -\frac{5}{4}x - 3$       c)  $y = \frac{4}{7}x + 2$       d)  $y = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}$

Při rýsování využijev mřížové body grafu.

Ve všech bodech chceme body s celočíselnými souřadnicemi  $\Rightarrow$  potřebujeme za  $x$  dosazovat násobky jmenovatele zlomku koeficientu  $a$ .

a)  $y = 0,5x + 1$

$b = 1 \Rightarrow$  průsečík s osou  $y$   $[0; 1]$

$x = 2$ :  $y = 0,5 \cdot 2 + 1 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow$  bod  $[2; 1]$

b)  $y = -\frac{5}{4}x - 3$

$b = -3 \Rightarrow$  průsečík s osou  $y$   $[0; -3]$

$x = 4: y = -\frac{5}{4} \cdot 4 - 3 = -5 - 3 = -8 \Rightarrow$  bod  $[2; 1]$

c)  $y = \frac{4}{7}x + 2$

$b = 2 \Rightarrow$  průsečík s osou  $y$   $[0; 2]$

$x = 7: y = \frac{4}{7} \cdot 7 + 2 = 4 + 2 = 6 \Rightarrow$  bod  $[7; 6]$

d)  $y = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}$

Pokud za  $x$  dosadíme násobek pěti, získáme celé číslo, od kterého odečítáme  $\frac{4}{5} \Rightarrow$  výsledek nebude celočíselný.

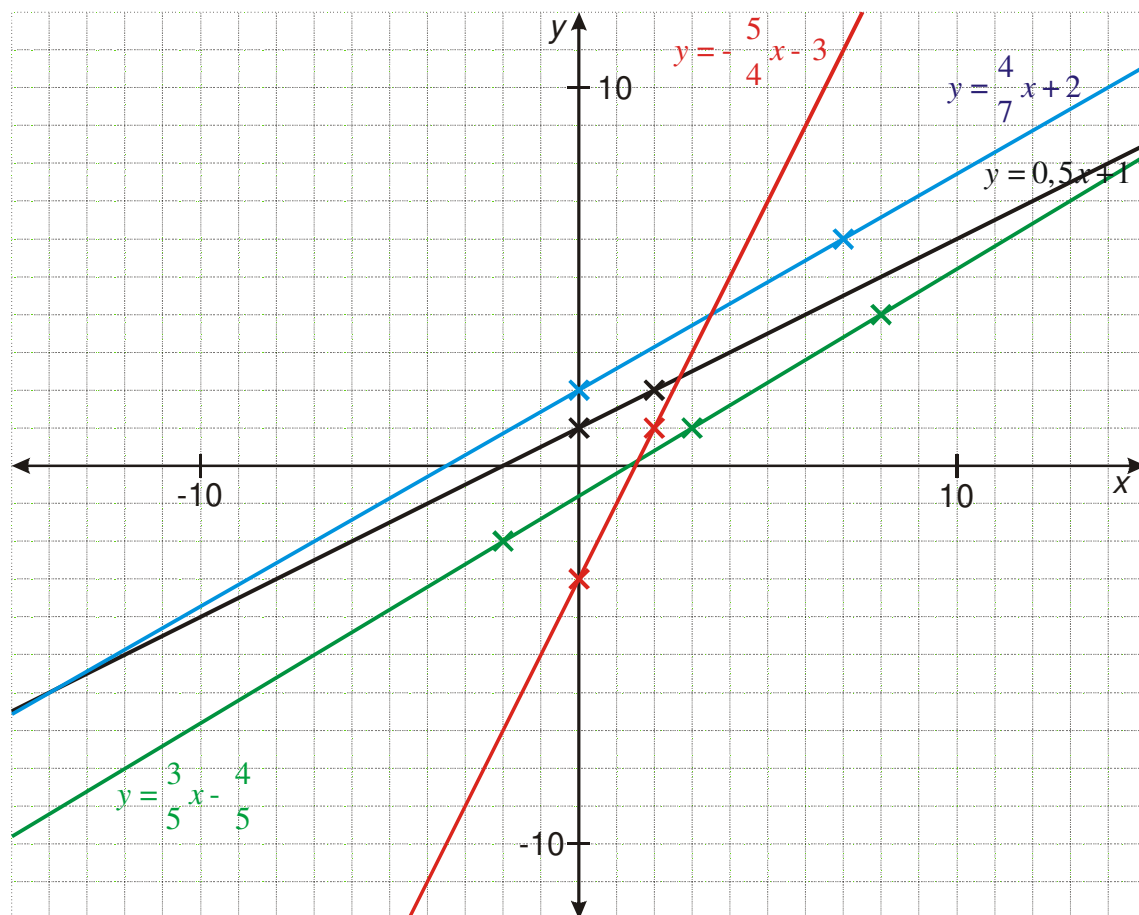
Upravíme předpis funkce:  $y = \frac{1}{5}(3x - 4) \Rightarrow$  hledáme taková čísla pro  $x$ , pro která je výraz

$3x - 4$  dělitelný pěti, vyhovuje například  $x = 3$ ,  $x = 8$  nebo  $x = -2$ .

$x = 3: y = \frac{3}{5} \cdot 3 - \frac{4}{5} = \frac{9}{5} - \frac{4}{5} = \frac{5}{5} = 1 \Rightarrow$  bod  $[3; 1]$

$x = 8: y = \frac{3}{5} \cdot 8 - \frac{4}{5} = \frac{24}{5} - \frac{4}{5} = \frac{20}{5} = 4 \Rightarrow$  bod  $[8; 4]$

$x = -2$  (pro kontrolu):  $y = \frac{3}{5} \cdot (-2) - \frac{4}{5} = \frac{-6}{5} - \frac{4}{5} = \frac{-10}{5} = -2 \Rightarrow$  bod  $[-2; -2]$



**Dodatek:** Potřebné hodnoty  $x$  je možné i vypočítat. Upravíme předpis funkce:  $y = \frac{1}{5}(3x-4)$

$\Rightarrow$  hledáme taková čísla pro  $x$ , pro která je výraz  $3x-4$  dělitelný pěti, tedy platí

$$3x-4=5k \quad /+4$$

$$3x=5k+4 \quad /:3$$

$$x = \frac{5k+4}{3}$$

Dosazujeme za  $k$  a počítáme hodnoty  $x$  (vybíráme celočíselné výsledky):

$$k=1: x = \frac{5 \cdot 1 + 4}{3} = \frac{9}{3} = 3,$$

$$k=2: x = \frac{5 \cdot 2 + 4}{3} = \frac{14}{3}$$

$$k=3: x = \frac{5 \cdot 3 + 4}{3} = \frac{19}{3}$$

$$k=4: x = \frac{5 \cdot 4 + 4}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

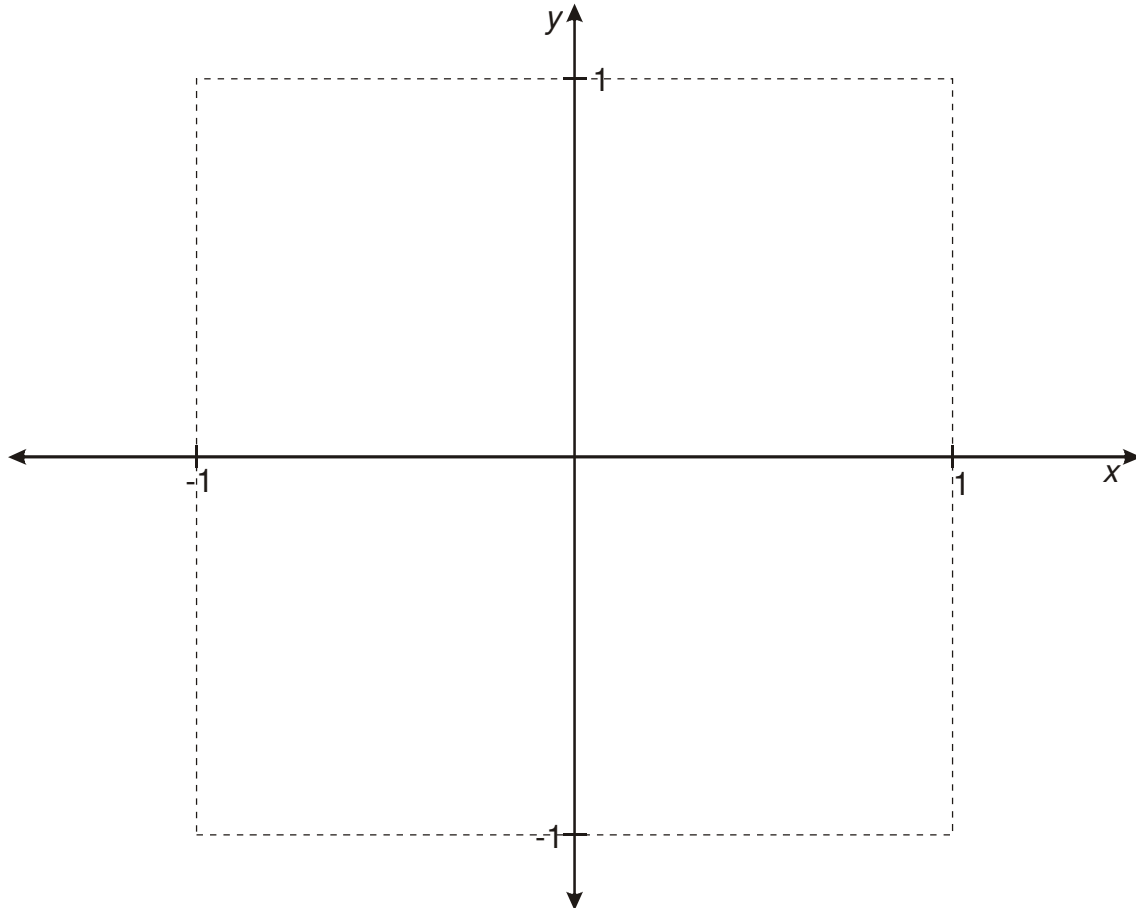
Za  $k$  je možné dosazovat i záporná čísla (prvním vyhovujícím bude  $k = -2$  vedoucí na hodnotu  $x = -2$ ).

**Př. 6:** Dorýsuj do obrázku grafy lineárních funkcí. Využij průsečíky grafů s vytečkovaným čtvercem.

a)  $y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{4}$

b)  $y = -\frac{7}{2}x + \frac{4}{3}$

c)  $y = -3x + 2,5$



Vytečkovaný čtverec představuje body jejichž  $x$ -ová i  $y$ -ová souřadnice patří do intervalu  $\langle -1; 1 \rangle$ .

Vzdálenosti 1 na ose odpovídá 5 cm  $\Rightarrow$  vypočtené souřadnice musíme násobit pěti.

a)  $y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{4}$

$b = -\frac{1}{4} \Rightarrow$  bod grafu  $\left[0; -\frac{1}{4}\right] \Rightarrow$  na ose  $y$  naměříme  $5 \cdot \frac{1}{4} \text{ cm} = \frac{5}{4} \text{ cm} = 1,25 \text{ cm}$  směrem dolů.

$x = 1: y = \frac{3}{5} \cdot 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{5} - \frac{1}{4} = \frac{12}{20} - \frac{5}{20} = \frac{7}{20} \Rightarrow$  bod  $\left[1; \frac{7}{20}\right] \Rightarrow$  na pravé svislé straně čtverce

naměříme  $5 \cdot \frac{7}{20} \text{ cm} = \frac{7}{4} \text{ cm} = 1,75 \text{ cm}$  od osy  $x$  nahoru.

b)  $y = -\frac{7}{2}x + \frac{4}{3}$

$b = -\frac{1}{4} \Rightarrow$  bod grafu  $\left[0; \frac{1}{4}\right] \Rightarrow$  nebude vidět na našem obrázku.

$a = -\frac{7}{2} \Rightarrow$  funkce je rychle klesající  $\Rightarrow$  určitě se neprotne s pravou stranou čtverce.

Hledáme průsečíky s horní a dolní stranou čtverce.

- $y = 1: 1 = -\frac{7}{2}x + \frac{4}{3} \quad / \cdot 6$

$$6 = -7 \cdot 3x + 4 \cdot 2$$

$$6 = -21x + 8 \quad / +21x - 6$$

$$21x = 2 \quad / : 21$$

$$x = \frac{2}{21} \Rightarrow \text{bod } \left[ \frac{2}{21}; 1 \right] \Rightarrow \text{na horní straně čtverce naměříme}$$

$$5 \cdot \frac{2}{21} \text{ cm} = \frac{10}{21} \text{ cm} = 0,48 \text{ cm doprava od osy } y.$$

- $y = -1: -1 = -\frac{7}{2}x + \frac{4}{3} \quad / \cdot 6$

$$-6 = -7 \cdot 3x + 4 \cdot 2$$

$$6 = -21x + 8 \quad / +21x + 6$$

$$21x = 14 \quad / : 21$$

$$x = \frac{14}{21} \Rightarrow \text{bod } \left[ \frac{14}{21}; -1 \right] \Rightarrow \text{na dolní straně čtverce naměříme}$$

$$5 \cdot \frac{14}{21} \text{ cm} = \frac{70}{21} \text{ cm} = \frac{10}{3} \text{ cm} = 3,33 \text{ cm doprava od osy } y.$$

c)  $y = -3x + 2,5$

$b = 2,5 \Rightarrow$  bod grafu  $[0; 2,5] \Rightarrow$  nebude vidět na našem obrázku.

$a = -3 \Rightarrow$  funkce je rychle klesající  $\Rightarrow$  hledáme průsečíky s horní a dolní stranou čtverce.

- $y = 1: 1 = -3x + 2,5 \quad / \cdot 2$

$$2 = -6x + 5 \quad / +5x - 2$$

$$6x = 3 \quad / : 6$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{bod } \left[ \frac{1}{2}; 1 \right] \Rightarrow \text{na horní straně čtverce naměříme } 5 \cdot \frac{1}{2} \text{ cm} = \frac{5}{2} \text{ cm} = 2,5 \text{ cm}$$

doprava od osy  $y$ .

- $y = -1: -1 = -3x + 2,5 \quad / \cdot 2$

$$-2 = -6x + 5 \quad / +5x - 2$$

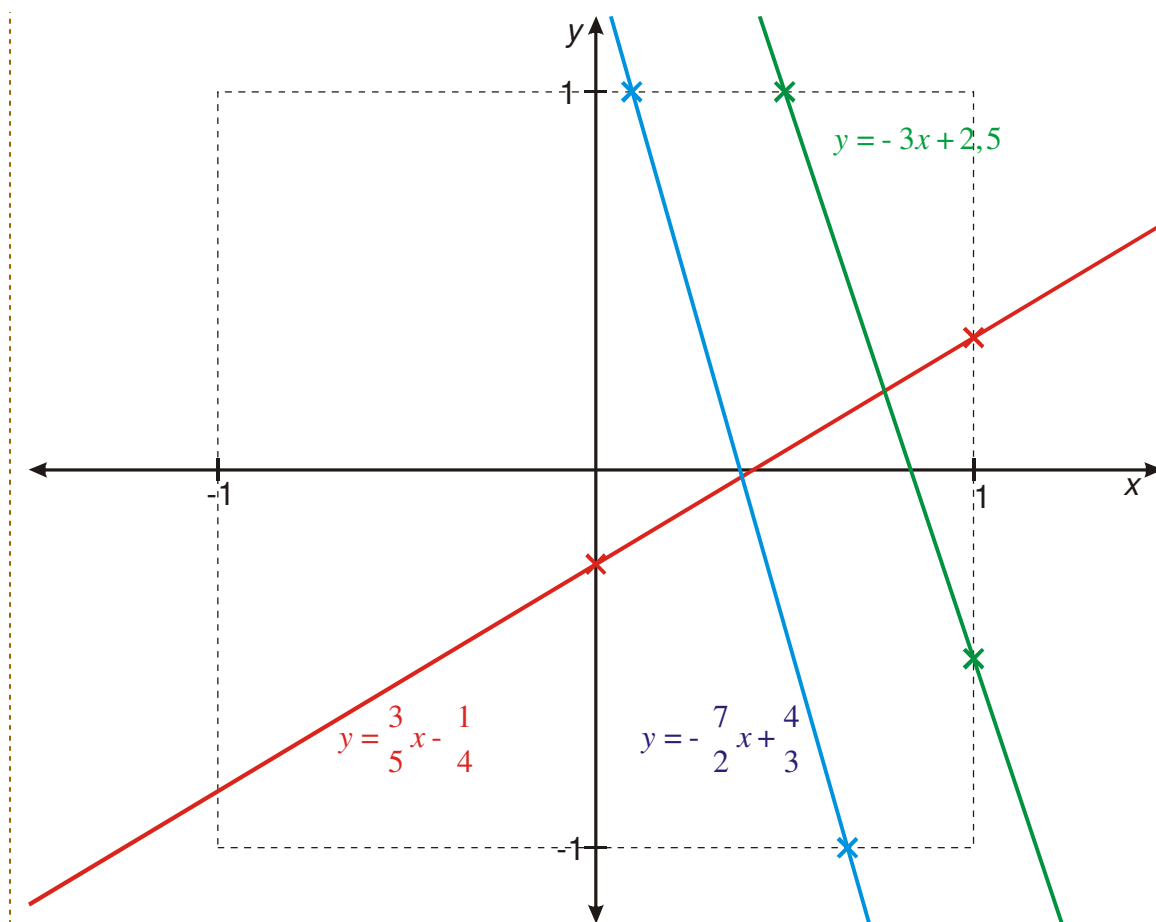
$$6x = 7 \quad / : 6$$

$$x = \frac{7}{6} \Rightarrow \text{bod } \left[ \frac{7}{6}; -1 \right] \Rightarrow \text{mimo náš obrázek.}$$

$\Rightarrow$  graf funkce se musí protnout s pravou stranou čtverce.

$x = 1: y = -3 \cdot 1 + 2,5 = -0,5 \Rightarrow$  bod  $[1; -0,5] \Rightarrow$  na pravé svislé straně čtverce naměříme

$5 \cdot 0,5 \text{ cm} = 2,5 \text{ cm}$  od osy  $x$  dolů.



**Shrnutí:**