

4.4.15 Lineární funkce IV

Předpoklady: 040414

Př. 1: Urči předpis lineární funkce, která prochází přes následující dvojice bodů.

a) $[0; 2]; [2; 3]$ b) $[-3; -2]; [6; 1]$ c) $[-2; 3]; [4; -1]$

a) $[0; 2]; [2; 3]$

Dosadíme do předpisu funkce $y = ax + b$:

- $[0; 2]: 2 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 2$
- $[2; 3]: 3 = a \cdot 2 + b$

Do druhé rovnice dosadíme $b = 2: 3 = a \cdot 2 + 2 \quad | -2$

$$1 = 2a \quad | :$$

$$a = \frac{1}{2}$$

Hledaná funkce $y = \frac{1}{2}x + 2$.

b) $[-3; -2]; [6; 1]$

Dosadíme do předpisu funkce $y = ax + b$:

- $[-3; -2]: -2 = a \cdot (-3) + b$
- $[6; 1]: 1 = a \cdot 6 + b$

Máme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{l} -3a + b = -2 \\ 6a + b = 1 \end{array} \quad \text{Můžeme řešit odčítací metodou.}$$

$$\begin{array}{r} 6a + b = 1 \\ -3a + b = -2 \\ \hline [2] - [1] \quad 9a = 3 \end{array}$$

$$a = \frac{1}{3}$$

Dopočteme $b: -3a + b = -2 \quad | +3a$

$$b = 3a - 2 = 3 \cdot \frac{1}{3} - 2 = -1$$

Hledaná funkce $y = \frac{1}{3}x - 1$.

c) $[-2; 3]; [4; -1]$

Dosadíme do předpisu funkce $y = ax + b$:

- $[-2; 3]: 3 = a \cdot (-2) + b$
- $[4; -1]: -1 = a \cdot 4 + b$

Máme soustavu rovnic:

$$-2a + b = 3$$

$$4a + b = -1$$

Z první rovnice vyjádříme b a dosadíme do druhé:

$$-2a + b = 3 \quad / +2a$$

$$b = 2a + 3$$

Dosadíme: $4a + 2a + 3 = -1 \quad / -3$

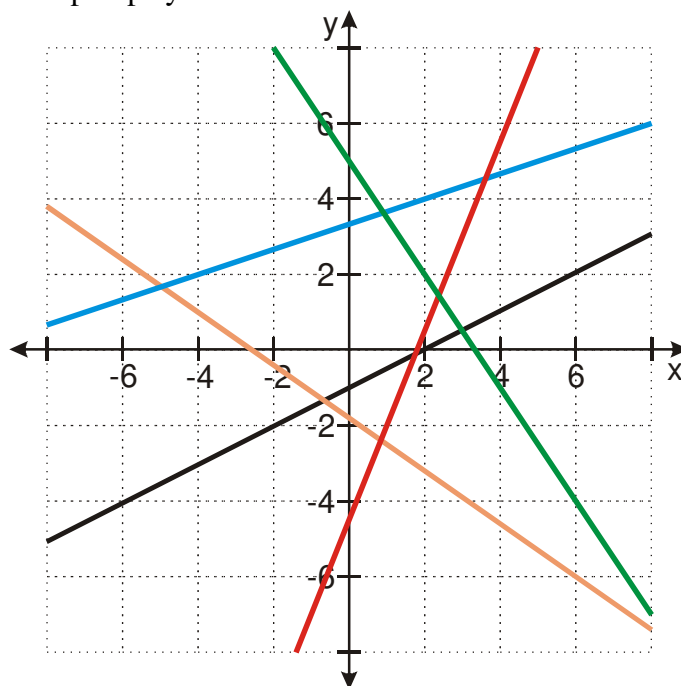
$$6a = -4 \quad / :6$$

$$a = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

Dopočteme b : $b = 2a + 3 = 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 3 = \frac{5}{3}$

Hledaná funkce $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$.

Př. 2: Urči předpisy lineárních funkcí na obrázku.



U všech funkcí postupujeme stejně: Najdeme v grafu dva body (nejlépe průsečík s osou y), které použijeme k dosažení do předpisu funkce $y = ax + b$.

Černý graf

- $[0; -1] \Rightarrow b = -1$

- $[2; 0] \Rightarrow 0 = a \cdot 2 + b = 2a - 1 \quad / +1$

$$2a = 1 \quad / :2$$

$$a = \frac{1}{2}$$

Černý graf je grafem funkce $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Kontrola: Graf by měl procházet osou y v záporných hodnotách, měl by být rostoucí s malým sklonem.

Zelený graf

- $[0; 5] \Rightarrow b = 5$
- $[2; 2] \Rightarrow 2 = a \cdot 2 + b = 2a + 5 \quad | -5$

$$2a = -3 \quad | :2$$

$$a = -\frac{3}{2}$$

Zelený graf je grafem funkce $y = -\frac{3}{2}x + 5$.

Kontrola: Graf by měl procházet osou y v kladných hodnotách, měl by být klesající se středním sklonem.

Modrý graf

- $[-1; 3]: 3 = a \cdot (-1) + b$
- $[2; 4]: 4 = a \cdot 2 + b$

Máme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{l} -a + b = 3 \\ 2a + b = 4 \end{array} \quad \text{Můžeme řešit odčítací metodou.}$$

$$\begin{array}{r} 2a + b = 4 \\ -a + b = 3 \\ \hline [2] - [1] \quad 3a = 1 \end{array}$$

$$a = \frac{1}{3}$$

Dopočteme b : $-a + b = 3 \quad | +a$

$$b = a + 3 = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$$

Hledaná funkce $y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$.

Kontrola: Graf by měl procházet osou y v kladných hodnotách, měl by být rostoucí s malým sklonem.

Červený graf

- $[1; -2]: -2 = a \cdot 1 + b$
- $[3; 3]: 3 = a \cdot 3 + b$

Máme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{l} a + b = -2 \\ 3a + b = 3 \end{array} \quad \text{Můžeme řešit odčítací metodou.}$$

$$\begin{array}{r} 3a + b = 3 \\ a + b = -2 \\ \hline [2] - [1] \quad 2a = 5 \end{array}$$

$$a = \frac{5}{2}$$

Dopočteme b : $a + b = -2 \quad | -a$

$$b = -2 - a = -2 - \frac{5}{2} = -\frac{9}{2}$$

Hledaná funkce $y = \frac{5}{2}x - \frac{9}{2}$.

Kontrola: Graf by měl procházet osou y v záporných hodnotách, měl by být rostoucí s velkým sklonem.

Žlutý graf

- $[-4; 1]: 1 = a \cdot (-4) + b$
- $[6; -6]: -6 = a \cdot 6 + b$

Máme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} -4a + b &= 1 \\ 6a + b &= -6 \end{aligned} \quad \text{Můžeme řešit odčítací metodou.}$$

$$\begin{array}{r} 6a + b = -6 \\ -4a + b = 1 \\ \hline [2] - [1] \quad 10a = -7 \end{array}$$

$$a = \frac{-7}{10}$$

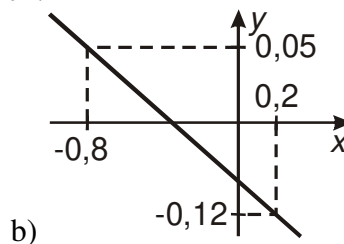
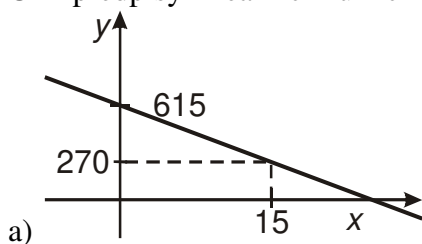
Dopočteme b : $-4a + b = 1 \quad / +4a$

$$b = 1 + 4a = 1 + 4 \cdot \left(-\frac{7}{10}\right) = \frac{10}{10} - \frac{28}{10} = \frac{-18}{10} = -\frac{9}{5}$$

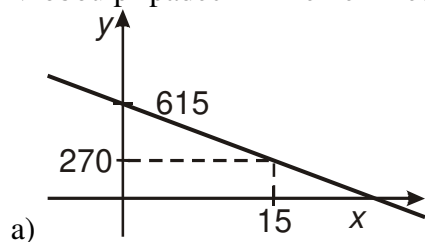
Hledaná funkce $y = -\frac{7}{10}x - \frac{9}{5}$.

Kontrola: Graf by měl procházet osou y v záporných hodnotách, měl by být klesající se středním sklonem.

Př. 3: Urči předpisy lineárních funkcí na obrázcích.



V obou případech můžeme ihned dosazovat body vyznačené na obrázcích.



Dosadíme do předpisu funkce $y = ax + b$:

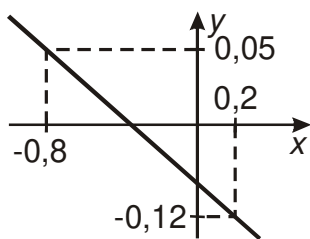
- $[0; 615]: 615 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 615$
- $[15; 270]: 270 = a \cdot 15 + b$

Do druhé rovnice dosadíme $b = 615$: $270 = a \cdot 15 + 615 \quad / -615$

$$-345 = 15a \quad / :$$

$$a = -23$$

Hledaná funkce $y = -23x + 615$.



b)

Dosadíme do předpisu funkce $y = ax + b$:

- $[-0,8; 0,05]$: $0,05 = a \cdot (-0,8) + b$
- $[0,2; -0,12]$: $-0,12 = a \cdot 0,2 + b$

Máme soustavu rovnic:

$$-0,8a + b = 0,05$$

$$0,2a + b = -0,12$$

Z první rovnice vyjádříme b a dosadíme do druhé:

$$-0,8a + b = 0,05 \quad / +0,8a$$

$$b = 0,8a + 0,05$$

Dosadíme: $0,2a + 0,8a + 0,05 = -0,12 \quad / -0,05$

$$a = -0,17$$

Dopočteme b : $b = 0,8a + 0,05 = 0,8 \cdot (-0,17) + 0,05 = -0,136 + 0,05 = -0,086$

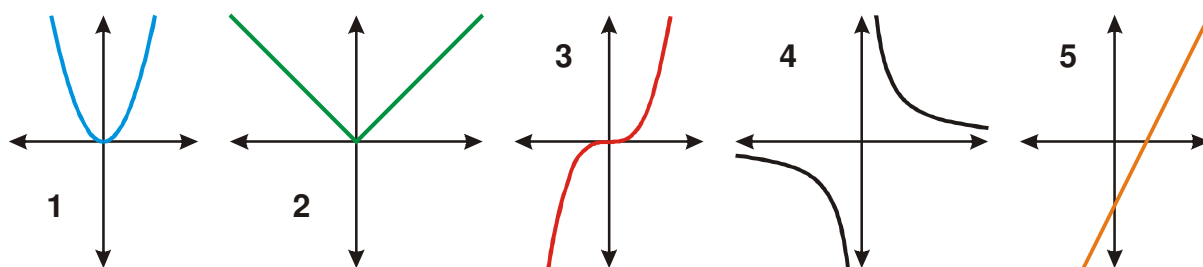
Hledaná funkce $y = -0,17x - 0,086$

Pedagogická poznámka: Následující příklad (jen pro rychlejší žáky) není o pamatování (použité funkce ještě nebyly většinou probrány), ale o představivosti. Při diskusi se žáky je také možné zjistit, kdo stále ještě nepochopil smysl funkce jako zařízení, které vložená čísla mění na jiná čísla.

Př. 4: Na následujících obrázcích jsou načrtnuty funkce:

- a) $y = x^2$ b) $y = \frac{1}{x}$ c) $y = 2x - 3$ d) $y = |x|$ e) $y = x^3$

Přiřaď každému obrázku odpovídající předpis.



Obrázek 5 představuje lineární funkci $y = 2x - 3$ v bodě c) (jde o jedinou přímku v nabídce, navíc prochází osou y v bodě se zápornou hodnotou y).

Ostatní grafy musíme rozlišit podle předpisů.

a) $y = x^2$ - hodnoty funkce budou pouze nezáporná čísla (druhá mocnina všech čísel je nezáporná), stejnou vlastnost má však i funkce d) $y = |x|$, protože i absolutní hodnota z libovolného čísla je vždy nezáporná.

Hledáme rozdíl mezi funkcemi $y = x^2$ a $y = |x|$:

- $y = x^2$: hodnoty rostou čím dál rychleji $1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, \dots$

- $y = |x|$: pro kladná x se chová stejně jako $y = x$,

⇒

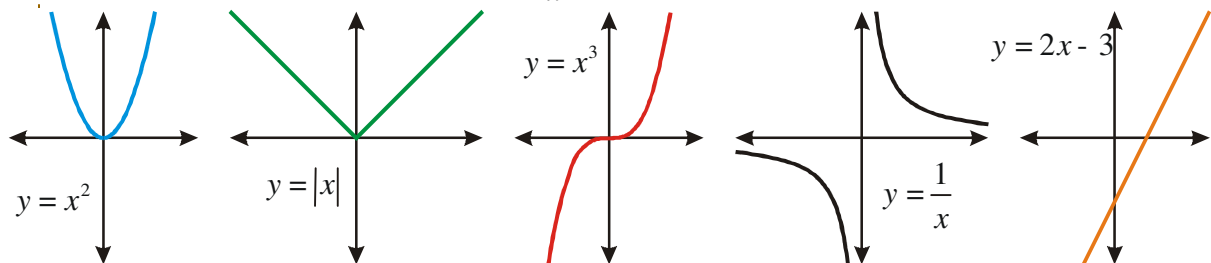
- obrázek 1 představuje funkci $y = x^2$ (hodnoty stoupají čím dál rychleji),
- obrázek 2 představuje funkci $y = |x|$ (hodnoty stoupají jako u funkce $y = x$).

Zbývá rozlišit funkce $y = \frac{1}{x}$ a $y = x^3$:

- $y = \frac{1}{x}$: pro kladná čísla x platí: čím větší x , tím menší y : $\frac{1}{1} = 1$, $\frac{1}{2} = 0,5$, $\frac{1}{10} = 0,1$, ...,
- $y = x^3$: pro kladná čísla x platí: čím větší x , tím větší y : $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, ...,

⇒

- obrázek 3, představuje funkci $y = x^3$ (pro kladná x hodnoty stoupají),
- obrázek 4, představuje funkci $y = \frac{1}{x}$ (pro kladná x hodnoty klesají).



Shrnutí: Předpis lineární funkce získáme ze dvou bodů grafu dosazením a vyřešením vzniklé soustavy rovnic.