4.4.16 Absolutní hodnota I

Předpoklady: 040415

Př. 1: Vypočti.
a) $\left|-2\right|$ b) $\left|7,4\right|$ c) $\left|2-7\right|$ d) $\left|2-\left|3-4\right|+1\right|$

a) $\left|-2\right|=2$

b) $\left|7,4\right|=7,4$

c) $\left|2-7\right|=\left|-5\right|=5$

d) $\left|2-\left|3-4\right|+1\right|=\left|2-\left|-1\right|+1\right|=\left|2-1+1\right|=\left|2\right|=2$

Př. 2: Popiš slovně, jak určujeme absolutní hodnotu pro různá reálná čísla.

Pokud je číslo uvnitř absolutní hodnoty kladné nebo nula, číslo uvnitř neměníme.
Pokud je číslo uvnitř absolutní hodnoty záporné, číslo uvnitř změníme na kladné vypouštěním znaménka mínus.

Př. 3: Doplň definici absolutní hodnoty (nahraď vytečkované části).
Absolutní hodnotu $|x|$ reálného čísla x definujeme takto:
je-li ...., pak $|x|=x$,
je-li $x<0$, pak ....

Absolutní hodnotu $|x|$ reálného čísla x definujeme takto:

- je-li $x\geq 0$, pak $|x|=x$, (první věta slovního popisu v předchozím příkladu)
- je-li $x<0$, pak $|x|=-x$. (druhá věta slovního popisu v předchozím příkladu)

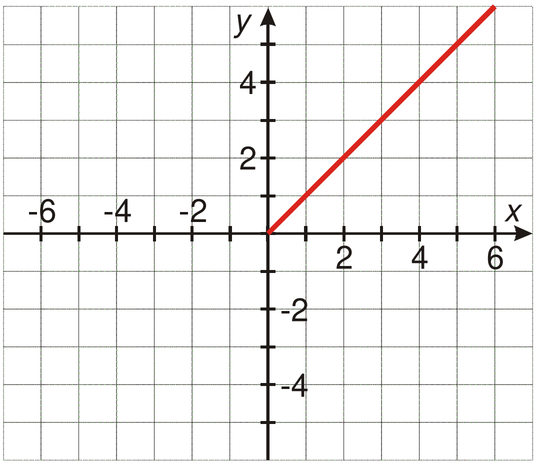
Pedagogická poznámka: Doplnění druhé řádky definice představuje pro většinu žáků nepřekonatelný oříšek. Nečekáme příliš dlouho a napíšu na tabuli řešení, poté ještě nechávám žáky, aby si samostatně zkusili rozmyslet, proč právě tento zápis znamená „, číslo uvnitř změníme na kladné vypouštěním znaménka mínus“ a pak si ještě zkoušíme na tabuli konkrétní dosazení zápisy typu $\begin{array}{l}|x|=-x\\ x=(-3)\\ |(-3)|=-(-3)=3\end{array}$.

Diskuse je to důležitá, ve skutečnosti jde o to, že spousta žáků má nesprávnou představu o proměnné, ze které vyplývá, že pokud je někde napsáno $-x$ jde o číslo záporné (ve skutečnosti ze zápisu $-x$ nemůžeme znaménko poznat, dokud nevíme, jestli x představuje kladné nebo záporné číslo).

Př. 4: Odhadni (využij definici z předchozího příkladu), jak bude vypadat graf funkce $y = |x|$. Které přímé úměrnosti můžeš využít? Zvol si alespoň pět vhodných reálných čísel, urči jejich absolutní hodnoty a výsledky využij o ověření svého odhadu.

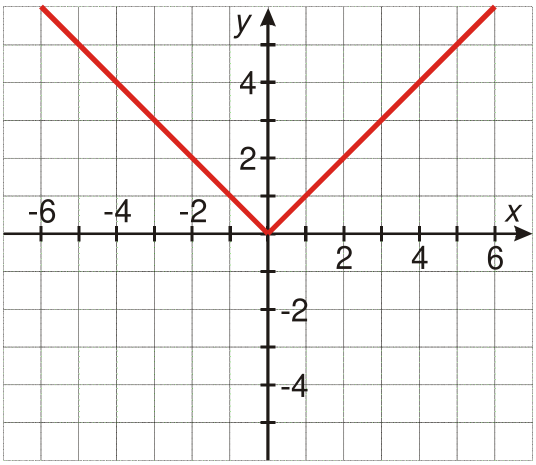
Definice:

je-li $x \geq 0$, pak $|x| = x \Rightarrow$ pro kladná čísla by se funkce $y = |x|$ měla chovat jako funkce $y = x$.



c

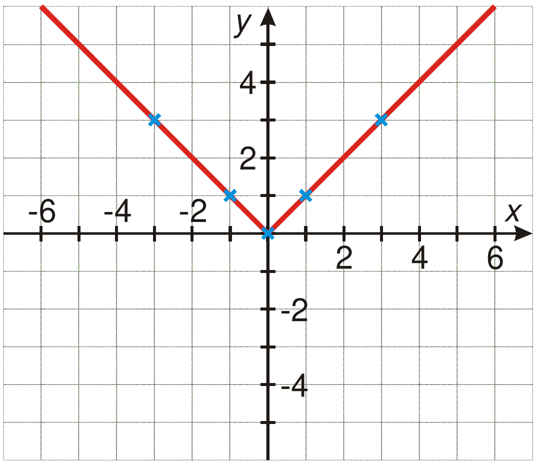
je-li $x < 0$, pak $|x| = -x \Rightarrow$ pro záporná čísla by se funkce $y = |x|$ měla chovat jako funkce $y = -x$



Sestavíme tabulku s pěti čísly

x	-3	-1	0	1	3
$y = \|x\|$	3	1	0	1	3

Vyneseme hodnoty z tabulky do grafu:



Všechny body z tabulky padly na graf $\Rightarrow$ náš odhad byl zřejmě správný.

Př. 5: Jaké vlastnosti by měl mít graf funkce absolutní hodnota? Zkontroluj, zda je má. Najdi osu souměrnosti grafu funkce absolutní hodnota. Čím je souměrnost grafu způsobena? S jakou vlastností absolutní hodnoty to souvisí?

$|x|$ je vždy nezáporné číslo $\Rightarrow$ graf funkce $y=|x|$ se nemůže dostat pod osu x (splněno).

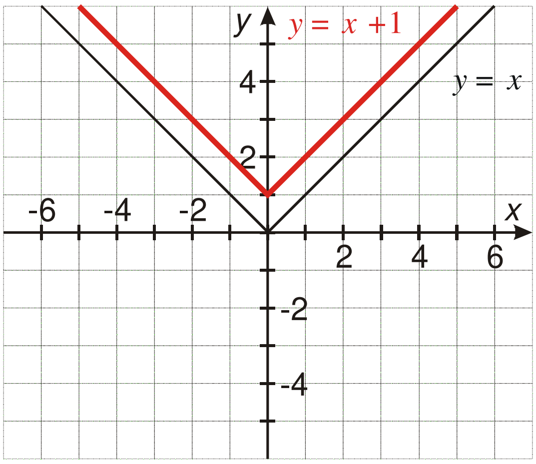
Graf je souměrný podle osy y. Tato souměrnost je způsobena tím, že pro navzájem opačná čísla (například -1 a 1) získáme stejnou absolutní hodnotu. Souměrnost je tedy způsobena tím, že absolutní hodnota vytváří stejné výsledky pro navzájem opačná čísla (že platí $|x|=|-x|$).

Pedagogická poznámka: Zbytek hodiny patří volnému zkoumání odvozených funkcí. S celou třídou kontrolujeme až v průběhu příští hodiny, spíše než o výsledky jde o systém uvažování.

Př. 6: Načrtni grafy funkcí. Svůj odhad ověř pomocí tabulky.
a) $y=|x|+1$ b) $y=|x|-2$ c) $y=|x-1|$ d) $y=2|x+2|$

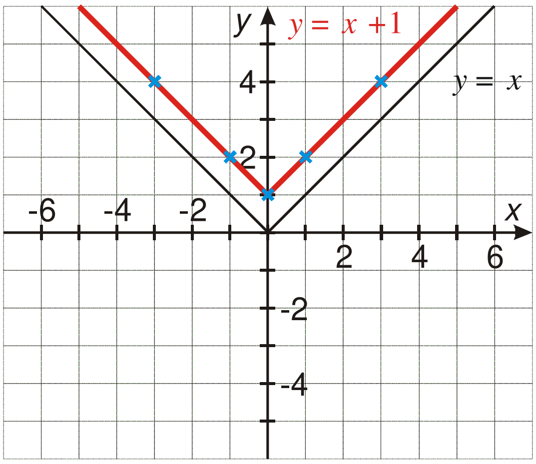
a) $y=|x|+1$

Funkce $y=|x|+1$ se od základní funkce $y=|x|$ liší pouze přičítáním jedničky $\Rightarrow$ hodnota funkce $y=|x|+1$ je pro libovolné x o 1 větší než hodnota funkce $y=|x|$ $\Rightarrow$ graf bude mít stejný tvar, ale bude posunutý o 1 nahoru.



Ověření: Do tabulky použijeme stejná čísla jako funkce $y = |x|$.

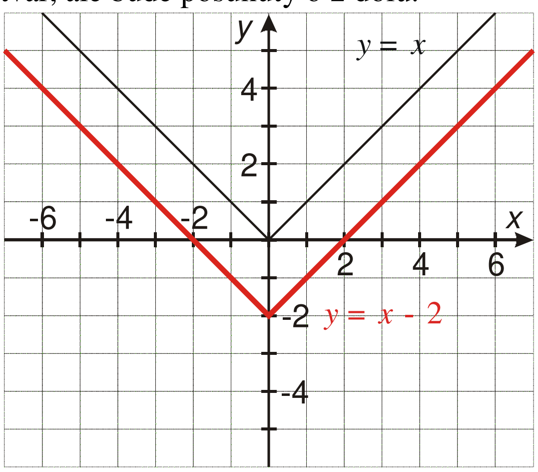
x	-3	-1	0	1	3
$y = \|x\| + 1$	4	2	1	2	4



Spočtené hodnoty potvrdily odhad.

b) $y = |x| - 2$

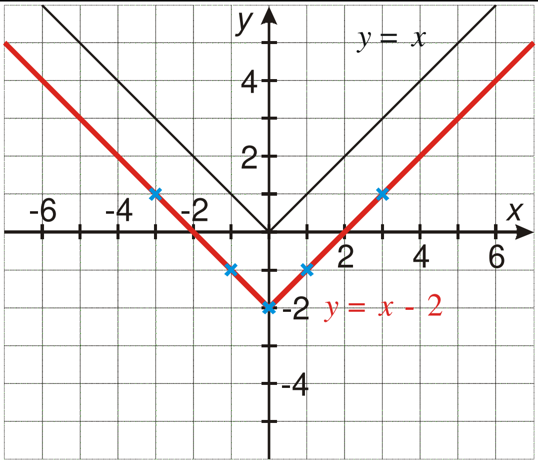
Funkce $y = |x| - 2$ se od základní funkce $y = |x|$ liší pouze dvojky $\Rightarrow$ graf bude mít stejný tvar, ale bude posunutý o 2 dolů.



Ověření: Do tabulky použijeme stejná čísla jako funkce $y = |x|$.

x	-3	-1	0	1	3

$y = \lvert x \rvert - 2$	1	-1	-2	-1	1



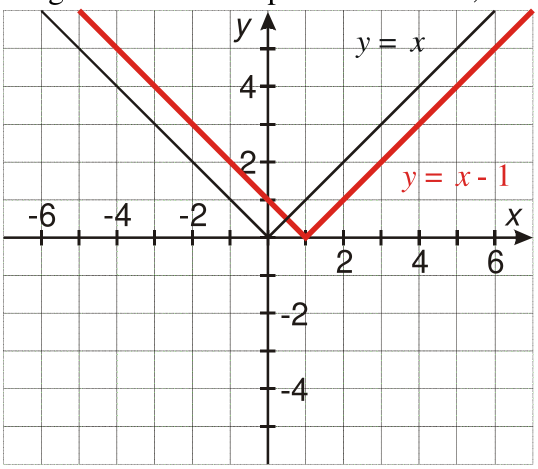
Odhad byl správný.

c) $y = \lvert x - 1 \rvert$

Postřeh: výraz -1 není vně, ale uvnitř absolutní hodnoty $\Rightarrow$ mění se hodnota x ještě před tím než z něj uděláme absolutní hodnotu $\Rightarrow$

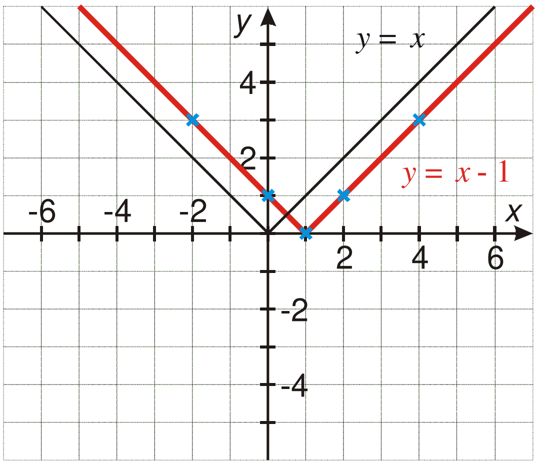
- hodnoty funkce budou vždy nezáporné (číslo, které vytvoří absolutní hodnota už neměníme),
- nejmenší hodnoty 0 funkce dosáhne pro $x = 1$ (při dosazení tohoto čísla budeme dělat absolutní hodnotu z 0)

$\Rightarrow$ graf funkce se neposune dolů o 1, ale o 1 doprava



Ověření: Čísla v tabulce "vycentrujeme" okolo $x = 1$.

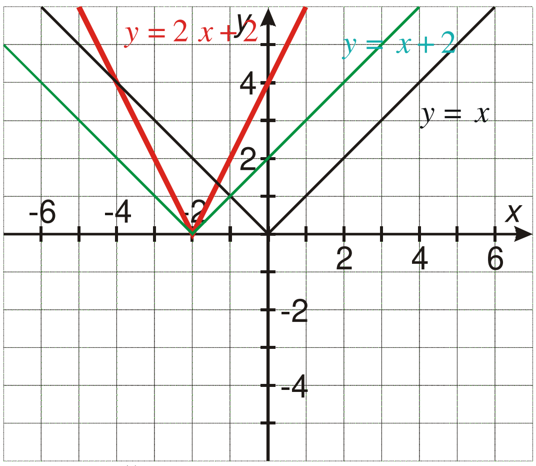
x	-2	0	1	2	4
$y = \lvert x - 1 \rvert$	3	1	0	1	3



d) $y = 2|x+2|$

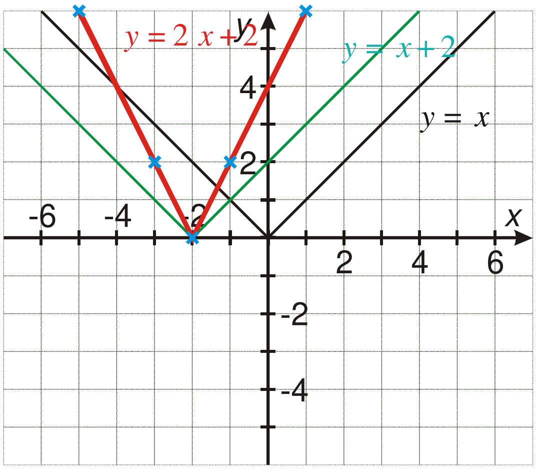
Předpis obsahuje dvě změny oproti základní funkci.

- $|x+2|$ - podobné jako v předchozím bodu, měníme hodnoty x ještě před absolutní hodnotou $\Rightarrow$ zřejmě se graf posune po ose x, tak aby jeho špička byla v bodu $x = -2$ (když dosadíme $x = -2$ uvnitř absolutní hodnoty bude 0).
- $2|x+2|$ - číslo, které získáme z absolutní hodnoty se dvakrát zvětšuje $\Rightarrow$ y-ové hodnoty grafu se dvakrát zvětší $\Rightarrow$ graf bude rychleji stoupat („véčko“ bude strmější, jako je strmější graf funkce $y = 2x$ v porovnání s grafem funkce $y = x$)



Ověření: Čísla v tabulce "vycentrujeme" okolo $x = -2$.

x	-5	-3	-2	-1	1
$y = 2\|x+2\|$	6	2	0	2	6



Shrnutí: Když napíšeme $-x$ neznamená to, že píšeme číslo záporné. Naopak pokud je x záporné číslo, výraz $-x$ znamená číslo kladné.